Sullo svolgimento di una delle quattro versioni della prova scritta di Geometria analitica e algebra lineare del giorno 11 febbraio 2013.

1. Stabilire se le due rette *r*, di equazioni cartesiane $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-3z=-1 \end{cases}$ ed *s*, di equazioni parametriche, nel parametro reale *t*, $x=1-3t, y=1-2t, z=-t$, sono sghembe o complanari; nel primo caso, scrivere un'equazione cartesiana del piano che contiene *r* ed è parallelo ad *s*, nel secondo caso, scrivere un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

(punti: 2+2)

Si può ricavare un vettore direttore della retta *r* facendo il prodotto vettoriale dei vettori normali ai due piani che si intersecano in *r* ; si ha $(-1,1,1)\wedge(1,0,-3)=(-3,-2,-1)$, esattamente il vettore di direzione di *s.* Quindi le due rette sono parallele.
Nel fascio di piani per *r*

$$\lambda(-x+y+z)+\mu(x-3z+1)=0$$

il piano che contiene *s* è determinato dalla condizione di contenere un punto di s*,* ad esempio (1,1,0):

$$\lambda(-1+1+0)+\mu(1+0+1)=2\mu=0 \ .$$

Per $\mu=0$ si ottiene il piano di equazione

$$-x+y+z=0.$$

Nota: nelle altre tre versioni del compito, le due rette erano incidenti.

---

2. Fissata una base $\mathcal{B}$ = {$\mathbf{v_1}$,$\mathbf{v_2}$,$\mathbf{v_3}$} di $\mathbb{R}^3$, consideriamo l'endomorfismo *L* di $\mathbb{R}^3$ così determinato:

- $\mathbf{v_1}$ è autovettore di *L*, associato all'autovalore 3
- $L(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_2}-\mathbf{v_3}$
- $L(\mathbf{v_3}) = \mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}+\mathbf{v_3}$.
  1) Scrivere la matrice associata ad *L* rispetto alla base $\mathcal{B}$;
  2) determinare i sottospazi Ker*L*, Im*L*;
  3) stabilire se è $\mathrm{Ker}L\oplus \mathrm{Im}\,L=\mathbb{R}^3$.
  4) Per il valori di h per cui è possibile, trovare tutti i vettori **v** per cui è $L(\mathbf{v})=h\mathbf{v}_1+(h+1)\mathbf{v}_3$.

(punti: 3+2+2+2)

---

1) L'applicazione lineare *L* è univocamente determinata (proposizione 5.2, pag. 96 di Abate – de Fabritiis) dai valori che essa assume sui vettori della base, perché, preso un qualunque vettore **v,** che si esprime in modo unico nella forma

$$\mathbf{v}=x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3$$

per definizione di applicazione lineare si ha

$$L(\mathbf{v})=xL(\mathbf{v}_1)+yL(\mathbf{v}_2)+zL(\mathbf{v}_3)\,.$$

Quindi, posto

$$L(\mathbf{v})=x'\mathbf{v}_1+y'\mathbf{v}_2+z'\mathbf{v}_3$$

risultano completamente individuate le coordinate *(x',y',z')* del vettore immagine.
Basta dunque utilizzare l'isomorfismo di $\mathbb{R}^3$ su se stesso definito da

$$\mathbf{v} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

il quale applica i tre vettori della base $\mathcal{B}$ sui vettori di componenti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice associata a *L* rispetto alla base $\mathcal{B}$ è quella **A** per la quale si ha

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Come è osservato varie volte nei capitoli 5 e 7 di Abate de Fabritiis (formula 5.4, esempio 5.12, dimostrazioni del corollario 5.9, del teorema 7.4, del teorema 7.7), la matrice associata ad una applicazione lineare ha come colonne le componenti delle immagini dei vettori della base. In questo caso, poiché $L(\mathbf{v}_2) = 3\,\mathbf{v}_1 = 3\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + 0\,\mathbf{v}_3$ ha le coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ ha le coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $L(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ ha le coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice associata è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Poiché la terza riga è multipla della seconda, e le prime due righe sono indipendenti, il rango (per righe e quindi anche per colonne) di **A** è 2; ne segue che la dimensione del nucleo di *L* è 1, e che la dimensione di Im*L* è 2.
Con semplici calcoli, che omettiamo, si trova:

$$\ker L = Span(-\frac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3); \operatorname{Im} L = Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3).$$

3) Il vettore che genera il nucleo di *L* è linearmente indipendente dai vettori della base di Im*L* , perché la matrice delle componenti è non singolare:

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

quindi lo spazio somma ker*L* + Im*L* coincide con $\mathbb{R}^3$: Dalla formula di Grassmann segue che lo spazio intersezione $\ker L \cap \operatorname{Im} L$ è {**0**}, quindi i due sottospazi sono supplementari.
Nota: in una delle altre tre versioni del compito l'intersezione tra Ker*L* e Im *L* non è il solo **0**, quindi in quel caso gli spazi non sono supplementari.

4) La ricerca delle controimmagini del vettore di componenti (*h,0,h*+1) porta alla discussione del rango della matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & h \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & h+1 \end{array}\right)$$

Si trova che il rango della matrice completa è uguale a quello di **A,** che è 2, per $h=-1$, nel qual caso le contro- immagini sono $\begin{pmatrix} \frac{-1-t}{3} \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$.

---

3. Nello spazio vettoriale reale $\mathcal{F}$ delle funzioni definite su $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$, consideriamo il sottospazio

$$U = Span(e^x, e^{-x}, \sinh(x)).$$

Determinare la dimensione di *U*.

(punti: 3)

Il compito a casa n. 3, assegnato in questo anno accademico, differisce da questo esercizio solo per la sostituzione della funzione senh(*x*) con cosh(*x*); lo svolgimento è pubblicato tra i materiali del corso.

---

4. a) Scrivere un'equazione cartesiana della superficie sferica *S* che è tangente al piano di equazione $3x+4y+36=0$ nel punto *T* =(–4, –6, 0) e passa per *Q*(–1, –2, –5);
b) scrivere delle equazioni cartesiane della circonferenza massima di *S* che passa per *T* e *Q*.

(punti: 4 + 3)

---

a) Il centro *C* della sfera è sulla retta per *T* con parametri direttori (3,4,0) :

$$C = (-4+3t, -6+4t, 0),$$

ed è equidistante da *T* e *Q*:

$$9t^2+16t^2 = (-3+3t)^2+(-4+4t)^2+(5)^2$$

Quindi

$$0 = 50-50t, t=1, C=(-1,-2,0)\text{, } \textit{raggio}=5.$$

Un'equazione di *S* è

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0\ .$$

b) Il piano che passa per il centro di *S* e per *T* e *Q* è

$\det\begin{pmatrix} x+1 & y+2 & z \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5\det\begin{pmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0$, cioè $4x-3y-2=0$, quindi il cerchio massimo ha equazioni

$$\begin{cases} 4x-3y-2=0 \\ x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0 \end{cases}.$$

5. Determinare il tipo, le direzioni degli assi (o dell'asse) di simmetria e, a seconda dei casi, il centro, gli asintoti, o l'unico vertice, della conica C di equazione

$$-x^2 + 2xy - y^2 - 7x + y = 0 .$$

Indicare un cambiamento di coordinate ortogonali che porti l'equazione di C in forma canonica.

(punti: 1 + 2 + 2 + 2)

La matrice dei coefficienti della conica

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -7/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ -7/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

è non singolare, quindi la conica non è degenere. Poiché $\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$, la conica è una parabola.

L'equazione caratteristica $\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda = 0$ ha gli autovalori 0, –2, cui corrispondono gli autospazi, di equazioni cartesiane, rispettivamente, $x - y = 0$ e $x + y = 0$.

Può essere conveniente osservare che se si pone l'equazione della parabola nella forma

$$-(x-y)^2 - 7x + y = 0 ,$$

allora si può rilevare facilmente che intersecando la parabola con qualunque retta che abbia la direzione dell'autospazio relativo all'autovalore 0 si ottiene una sola intersezione, perché il sistema

$$(*) \quad \begin{cases} -(x-y)^2 - 7x + y = 0 \\ x - y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k^2 - 7x + x - k = 0 \\ x - y = k \end{cases}$$

ha una sola soluzione; la direzione (1,1) è dunque la direzione dell'asse della parabola.

Non tutte le rette perpendicolari all'asse lo intersecano in punti reali; una di esse è la tangente nel vertice e le intersezioni, quando ci sono, sono simmetriche rispetto all'asse. Poiché la parabola passa per (0,0), la retta con la direzione ortogonale all'asse che passa per (0,0) la interseca in un altro punto (che è simmetrico di (0,0) rispetto all'asse); cerchiamo questa ulteriore intersezione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -(x-y)^2 - 7x + y = 0 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x^2 - 7x - x = 0 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Il punto medio tra le due intersezioni, (–1,1), appartiene all'asse, che è quindi la retta

$$x - y + 2 = 0.$$

Il vertice si ricava dal sistema (*) per $k = -2$; è il punto $(-1/3, 5/3)$.

Il cambiamento di coordinate necessario per portare la parabola in forma canonica risulta dalla composizione della traslazione che porta il vertice nell'origine con la rotazione la cui matrice ha come colonne dei versori che generino i due autospazi considerati prima:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Nota: nelle altre tre versioni del compito, le coniche erano o ellissi o iperboli.
Non era richiesto il grafico della curva; per soddisfare eventuali curiosità, ecco tuttavia un disegno della parabola che è stata studiata sopra.