Geometria analitica e algebra lineare

Prova scritta – 5 settembre 2013

Nome e cognome ______________________________ n. matricola________________

Scrivere nome e cognome <u>in testa ad ogni foglio</u>. Consegnare questo foglio. La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali.

1. Nello spazio vettoriale $M_{2,3}(\mathbb{R})$, delle matrici a due righe e tre colonne con elementi reali, si consideri il sottoinsieme $\mathbf{W}$ formato da quelle matrici il cui prodotto per il vettore $[1,1,1]^T$ è $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{B} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid \mathbf{B}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}.$$

Dimostrare che $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ e trovarne la dimensione e una base. (5 punti)

2. Determinare i valori del parametro λ per i quali risulta compatibile il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y-2z=\lambda \\ x+\lambda y-2z=1 \\ 2x+2y+(\lambda+1)z=2. \end{cases}$$

Per i valori di λ per cui il sistema ammette soluzioni, usare il metodo di Gauss per trovarle. (5 punti)

3. Sia $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare per la quale si ha: $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$.

a) Determinare delle basi e le dimensioni dei sottospazi ImT, Ker$T$.

b) Motivare le risposte alle seguenti domande:

   I. La matrice associata a T, rispetto alla base canonica, é una matrice invertibile?

   II. E' vero che si ha $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\,T \oplus \mathrm{Ker}\,T$?

(punti 3 + 1 + 2)

4. Scrivere un'equazione cartesiana del piano che è parallelo alla retta $\begin{cases} x-2y+4z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$ e contiene la retta di equazioni parametriche $x=1+2t, y=4t, z=t,$ per $t\in\mathbb{R}$.

(4 punti)

5. Determinare la distanza tra i piani σ , di equazione $x-2z=3$, σ', di equazione $\frac{x}{2}-z=0$. Scrivere un'equazione della superficie sferica che passa per (0,0,0) ed è tangente ad entrambi i piani.

(3 + 3 punti)

6. Nel piano euclideo, è data l'ellisse E che ha come fuochi i punti A = (0, 6) e B = (8, 0) e passa per O = (0,0). Usando le proprietà elementari delle ellissi, trovare delle equazioni cartesiane dei suoi assi di simmetria e le lunghezze dei semiassi (distanze dei vertici dal centro). ***Non** è richiesta un'equazione cartesiana di E.*

(4 punti)