

Geometria proiettiva, curve e superfici

Anno accademico 2010-11

Argomenti della prima parte: Geometria proiettiva

1. Introduzione alla geometria proiettiva: le origini nei trattati di prospettiva, i punti impropri, il piano proiettivo come ampliamento del piano della geometria elementare, o come insieme di rette di una stella nello spazio ordinario. Coordinate cartesiane omogenee nel piano e nello spazio, equazioni omogenee di rette, di coniche, di piani, i punti impropri delle coniche.

Definizione di **spazio proiettivo di dimensione n** , sottospazi proiettivi, coordinate proiettive, punti fondamentali, somme di punti. Modelli geometrici di spazi proiettivi reali di dimensione 2, 1. Equazioni di iperpiani, di sottospazi; intersezione, congiungente, formula di Grassmann. Sottospazi in posizione generale, sistemi di riferimento proiettivi, sistemi di riferimento nei sottospazi. Lo spazio proiettivo duale, la legge di dualità. Cambiamenti di coordinate proiettive.

Si veda:

Appunti delle lezioni introduttive, in <http://elea.linguistica.unical.it/moodle/>

Beltrametti, Carletti, Gallarati, Monti Bragadin, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Bollati Boringhieri, Torino, 2002, Capitolo primo, n. 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, [omessi 1.7.1 e parte di 1.7.2], Esempi 1.7.3, 1.7.4, 1.7.5, 1.7.6.

2. La retta proiettiva $P^1(\mathbf{R})$. Il birapporto di 4 punti di P^1 . Le proiettività di P^1 come bigezioni che conservano i birapporti, rappresentazione in coordinate omogenee, teorema fondamentale; classificazione in base ai punti uniti, caratteristica; equazione in forma razionale fratta. Forme canoniche delle proiettività di $P^1(\mathbf{R})$. Le involuzioni. Equazione di una proiettività in forma bilineare. Corrispondenze algebriche su P^1 , una corrispondenza algebrica e biunivoca tra rette proiettive è una proiettività. Forme di prima specie. Sottogruppi del gruppo delle proiettività della retta: le affinità e i sottogruppi delle affinità (traslazioni, omotetie). Invarianti affini.

Beltrametti, Carletti, Gallarati, Monti Bragadin, come sopra, Capitolo 2, **omettendo** 2.3 e la prop. 2.6.1.

3. Il piano proiettivo $P^2(\mathbf{R})$. Sistemi di riferimento proiettivi nel piano, interpretazione dei rapporti di due coordinate come birapporti; cambiamenti di coordinate, il cambiamento duale. Proiettività (collineazioni, omografie) del piano; una proiettività del piano induce proiettività tra rette corrispondenti. Teorema fondamentale delle proiettività piane. Proprietà armonica del quadrangolo piano completo. Il teorema di Desargues sull'involuzione. Prospettività tra rette nel piano, ogni proiettività tra due rette distinte è composizione di almeno due prospettività. Asse di collineazione, teorema di Pappo, teorema di Desargues sui triangoli. Classificazione delle proiettività piane, l'omologia non speciale; l'omologia e Piero della Francesca. Affinità, similitudini, isometrie.

Beltrametti, Carletti, Gallarati, Monti Bragadin, come sopra, Capitolo 4, **fuorché** il corollario 4.2.7, il teorema 4.2.10, con le osservazioni 4.2.11, 4.2.12, le proposizioni 4.6.2, 4.6.3, 4.6.4, 4.6.5, 4.6.6, 4.6.7, 4.6.8 e tutto il n. 4.8.

Appunti delle lezioni sulla classificazione delle proiettività piane e sui sottogruppi del gruppo proiettivo, nella pagina del corso in <http://elea.linguistica.unical.it/moodle/>

4. La polarità piana. La legge di reciprocità, la conica come luogo dei punti autoconiugati in una polarità. Intersezioni di coniche e rette, polare di un punto della conica, coniche specializzate. L'involuzione dei punti coniugati, la proprietà armonica della polare. Triangoli autopolari, classificazione proiettiva reale delle coniche. Classificazione affine e classificazione euclidea. Proprietà affini delle coniche: centro, diametri, involuzione dei diametri coniugati, assi.

Beltrametti, Carletti, Gallarati, Monti Bragadin, come sopra, Capitolo 6, 6.1, 6.2, 6.3, [omesso 6.4], la definizione 6.5.1, [omessa la prop. 6.5.2], 6.6, [omesso 6.6.2, 6.8, 6.9, 6.10] 6.11; del n. 6.12 solo le definizioni 6.13.2, omettendo tutto il resto del capitolo.