Geometria analitica e algebra lineare – 9 settembre 2011

Nome e cognome ____________________________________ n. matricola__________

Scrivere nome e cognome **in testa ad ogni foglio**. **Consegnare questo foglio.**

1. Nello spazio, sono assegnati la retta *r* di equazioni $\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$ ed il punto *P* di coordinate (–1,–2,0).
   - *a)* Scrivere delle equazioni parametriche e delle equazioni cartesiane della retta *r'* che passa per *P* ed è parallela a *r*.
   - *b)* Scrivere **un'equazione cartesiana** del piano delle due rette *r,r'*.

(Punti 2 + 2)

2. Scrivere un'equazione cartesiana del piano che passa per il punto *A* = (–1,0,1) ed è perpendicolare alla retta *s* $\begin{cases} x=0 \\ y=-z-1 \end{cases}$. Trovare la distanza di *A* da *s* .

(Punti 1 + 2)

3. Nello spazio, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, è assegnata la superficie *S* di equazione $x^2+y^2+z^2+2x+2z-1=0$. Studiare brevemente *S*. Studiare la conica *C* che è l'intersezione di *S* con il piano di equazione $y=-1$; determinare delle equazioni parametriche di *C*.

(Punti 2 + 2 + 1)

4. Nel piano, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, è assegnata la conica di equazione $x^2-y^2+2x=0$. Studiarla brevemente, e tracciarne un disegno approssimativo.

(Punti 3)

5. Giustificare[1] le risposte alle seguenti domande:
   - a) E' vero che $\mathbb{R}^2$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?
   - b) E' vero che i piani e le rette dello spazio (in cui si sceglie un sistema di coordinate cartesiane *Oxyz*) rappresentano geometricamente i sottospazi vettoriali propri di $\mathbb{R}^3$?
   - c) E' vero che, se si prendono in $\mathbb{R}^n$ due sottospazi vettoriali **U, V,** tali che la dimensione di **U** sia *k* e la dimensione di **V** sia *n–k*, allora è $\mathbb{R}^n=\mathbf{U}\oplus\mathbf{V}$?

(Punti 2 + 2 + 2)

6. Trovare gli autovalori e autovettori della matrice

$$\mathbf{N}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Usando i risultati ottenuti, stabilire se sia possibile diagonalizzare la matrice.

(Punti 3 + 1)

7. Stabilire, argomentando la risposta, se l'applicazione lineare $L_G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $\mathbf{G}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sia iniettiva, se sia surgettiva. Indicato con **W** il sottospazio Span$\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, determinare la dimensione del sottospazio immagine $L_G(\mathbf{W})$ **.**

(Punti 1 + 1 + 3)

[1] Le risposte non motivate sono considerate mancanti