Geometria analitica e algebra lineare – 6 luglio 2011

Nome e cognome ____________________________________ n. matricola__________

Scrivere nome e cognome **<u>in testa ad ogni foglio</u>. Consegnare questo foglio.**
La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. **Motivare le risposte**: ***<u>risultati privi di spiegazioni NON sono considerati validi.</u>***

1. Verificare che i punti $L=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ non sono allineati; scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane della retta *r’* che passa per *N* ed è parallela alla retta *r* dei punti *L* ed *M*; scrivere un’equazione cartesiana del piano delle due rette *r, r’* .

(punti 1+2+2)

2. Calcolare la distanza tra le rette $\begin{cases} x=6+t \\ y=4-2t \\ z=10+t \end{cases}, \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-z=2 \end{cases}.$

(punti 4)

3. Studiare le sezioni della superficie di equazione $x^2-4y^2+z^2=0$ con
a) i piani perpendicolari all’asse delle *y*
b) i piani che passano per l’asse delle *y*.
In base ai risultati ottenuti, stabilire di quale tipo di quadrica si tratti.
E’ vero che le rette di questa quadrica formano angoli di ampiezza costante con l’asse delle *y*? Giustificare la risposta.

(punti (2+2+1+1)

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi:

$$\mathbf{U}=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}, \mathbf{V}=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\6\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Trovare delle basi per i sottospazi **U + V, U** $\cap$ **V**. Spiegare per quale ragione si ritenga o non si ritenga vero che sia $\mathbb{R}^3 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{V}$.

(punti 2+2+1)

5. Indicato con $\mathbf{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, costituito dai polinomi di grado non superiore a 3, consideriamo l’applicazione “derivazione” D: $\mathbf{R}_3[t] \to \mathbf{R}_3[t]$ definita da:

$$D: p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \mapsto D(p(t))=a_1+2a_2t+3a_3t^2.$$

a) Verificare che *D* è un’applicazione lineare e, scelta una base di $\mathbf{R}_3[t]$, trovare la matrice associata a *D* in questa base.
c) Determinare i sottospazi Ker *D* e Im *D*
d) *D* è un isomorfismo di $\mathbf{R}_3[t]$ su se stesso?

(punti 2+2+1)

6. Siano $g_k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari associate alle matrici reali $\mathbf{A}_k=\begin{pmatrix}2&1&k\\0&1&2\\0&2&-2\end{pmatrix}.$

i) Determinare, se esiste, un valore k^* del parametro *k* per il quale la matrice $\mathbf{A}_{k^*}$ è diagonalizzabile.
ii) Trovare la matrice **C** di un cambiamento di base tale che, rispetto alla nuova base, g_{k^*} abbia forma diagonale.

(punti 2 + 3)