Geometria proiettiva, curve e superfici
Anno accademico 2010-11

Prova di Geometria proiettiva (metà dell'esame scritto)

28 giugno 2011

Tempo a disposizione per questa parte: due ore. E' consentito consultare un foglio di appunti personale, non in fotocopia, posto sul banco all'inizio della prova.
Scrivere nome, cognome e numero di matricola <u>in testa</u> ad ogni foglio.

(A) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sono assegnati: il piano α, di equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, ed il punto O = [1,0,0,0]. Per ogni punto $P = [a_1,...,a_4]$, trovare le coordinate del punto $P' = J(O,P) \cap \alpha$, e verificare che l'applicazione di proiezione

$$\pi_O\colon \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R}),$$

definita ponendo

$$\pi_O(P) = P',$$

è una proiettività degenere[1]; in particolare, mostrare che esiste un punto che non ha immagine.

(punti 9)

(B)

1. Scrivere la proposizione duale di:
   "nello spazio $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, dati un piano π ed una retta r, che non è contenuta in π, per ogni punto P, che appartenga a π e <u>non</u> appartenga ad r, esiste una sola retta che passa per P ed è complanare con r."
2. Dimostrare una delle due proposizioni.

(punti 5 + 4)

(C) Stabilire, con un breve ragionamento, se sia vero che le equazioni, dipendenti da un parametro reale k,

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 + 2kx + 1 = 0$$

definiscono delle coniche che sono tutte (qualunque sia k) tra loro affinemente equivalenti.
Determinare i centri di quelle coniche della famiglia per cui è possibile e descrivere la curva a cui appartengono i centri.
Rappresentare e studiare, per ciascuna conica per cui è possibile, l'involuzione dei diametri coniugati, ricavandone le equazioni degli eventuali asintoti delle coniche.

(punti 4 + 4 + 4)

Facoltativo: la proposizione enunciata in B.1 resta vera se si sostituisce $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$? Motivare la risposta.

---

[1] Cioè, la matrice ad essa associata è singolare