ESEMPIO DI SVOLGIMENTO DELLA PROVA D'ESAME di **Geometria euclidea, affine e proiettiva** del 4 luglio 2012

1. In $\mathbf{P}^3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $A = [1,1,1,1]$, $B = [0,0,1,0]$, $C = [1,1,2,1]$, $D = [1,0,1,0]$.
a) Scrivere delle equazioni cartesiane del sottospazio proiettivo p generato da A, B, C, D ;
b) scegliere, indicandone i generatori, un sottospazio proiettivo q che sia complementare di p.

a) Si nota che $C = A + B$, e che A, B, D sono linearmente indipendenti, quindi lo spazio p ha dimensione proiettiva 3 – 1 = 2. *Un'equazione cartesiana del piano p è data da*

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x_2 - x_4 = 0.$$

b) Nello spazio proiettivo tridimensionale, uno spazio q cha sia complementare di un piano ha dimensione x con x + 2 = 3 – 1; *q è dunque un punto (che non appartenga a p). Per esempio, q* = [0,1,0,0].

2. Dimostrare la proposizione su cui si fonda la "legge di dualità": *fissato in* $\mathbf{P}^n$(R) *un sottospazio proiettivo* S *di dimensione* k, *la famiglia di tutti gli iperpiani che contengono* S *è individuata da equazioni i cui coefficienti definiscono un sottospazio proiettivo di dimensione* n – k – 1 *nello spazio duale* $\mathbf{P}^n$(R)*.

(*Seguendo Beltrametti, Carletti, Gallarati, Monti Bragadin,* 1.6.3) *Sia* $S = J(P_1, \ldots, P_{k+1})$. *Il rango della matrice delle coordinate omogenee dei generatori,* $(p_{i1}, \ldots, p_{in+1})$, $(i = 1,\ldots,k+1)$, *è* k + 1. *Gli iperpiani che contengono S hanno equazioni* $u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_{n+1}x_{n+1} = 0$ *con*

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n+1} p_{ij}u_j = 0, \quad i = 1,...,k+1$$

Le soluzioni del sistema lineare omogeneo (*) *costituiscono un sottospazio vettoriale di dimensione* $(n+1)-(k+1) = n-k$ *, a cui corrisponde un sottospazio proiettivo di dimensione* $n - k - 1$ *nello spazio duale* $\boldsymbol{P}^{n*}$.

3. Chiamiamo "*pentagramma*" un sottoinsieme del piano proiettivo costituito da:

- *una cinquina ordinata di punti distinti,* P_1, P_2, …. P_5, *a tre a tre non allineati, detti* vertici
- *le cinque rette che congiungono ogni vertice con il successivo (rispetto all'ordinamento fissato) e l'ultimo con il primo, dette* lati**.**

Le altre cinque rette, determinate dai vertici, sono dette *rette diagonali*; ogni vertice appartiene a due lati e a due rette diagonali.
Definire per dualità il "*pentalatero*".

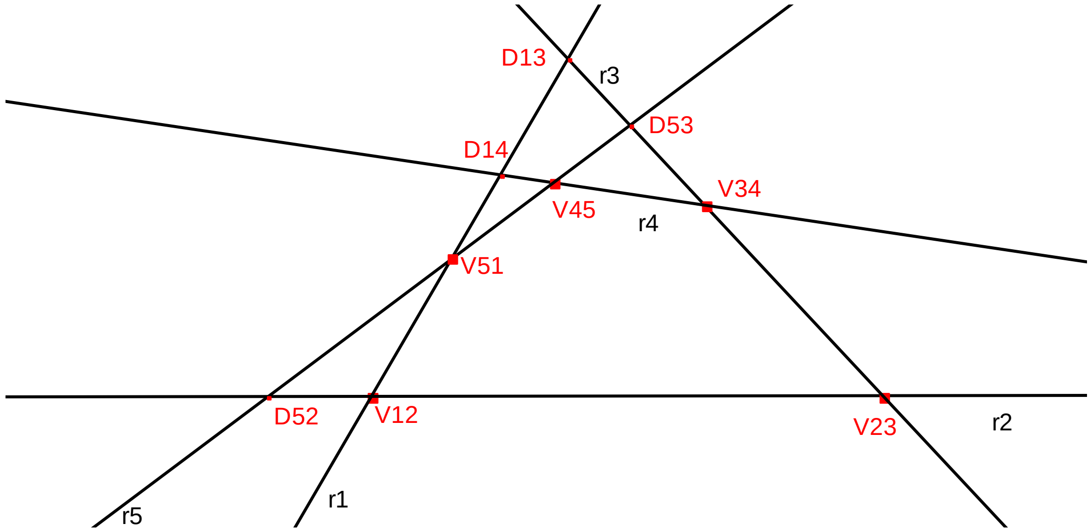
Si chiama pentalatero *un sottoinsieme del piano proiettivo costituito da*

- *una cinquina ordinata di rette distinte,* r_1, r_2, …. r_5, *a tre a tre non passanti per uno stesso punto, dette* lati

- *i cinque punti che sono l'intersezione di ogni lato con il successivo (rispetto all'ordinamento fissato) e dell'ultimo con il primo, detti* vertici**.**

Gli altri cinque punti, intersezioni dei lati fuori dei vertici, sono detti punti diagonali; ogni lato contiene due vertici e due punti diagonali.

Nella figura, sono indicati i vertici e alcuni punti diagonali del pentalatero di lati r1,…, r5; ad esempio, V12 è il vertice che è intersezione tra r1 e r2, D52 è il punto diagonale che è comune a r2 e r5.



4. Sia $\alpha: \mathbf{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ un'applicazione che agisce in questo modo:

$$\alpha([1,0]) = [1,1], \alpha([0,1]) = [-2,1], \alpha([1,1]) = [1,0], \alpha([-2,1]) = [4,1] \ .$$

Stabilire se α sia una proiettività; se così non fosse, modificare l'immagine di $[-2,1]$ in modo da ottenere una proiettività e, in ogni caso, trovarne i punti uniti e la caratteristica.

Perché α sia una proiettività è necessario che il birapporto di 4 punti sia uguale al birapporto delle loro immagini, ma così non è, avendosi (in coordinate non omogenee)

$$R(\infty,0,1,-2) = (-2,1,0) = \frac{2}{-1} = -2; R(1,-2,\infty,4) = (-2,1,4) = \frac{6}{3} = 2.$$

Per il teorema fondamentale sulle proiettività, le tre condizioni

$$\alpha([1,0]) = [1,1], \alpha([0,1]) = [-2,1], \alpha([1,1]) = [1,0]$$

determinano una ed una sola proiettività; poiché questa scambia tra loro i punti $[1,0]$ e $[1,1]$ per il **teorema sulle involuzioni** *scambia tutte le coppie. Necessariamente, quindi, l'immagine di* $[-2,1]$ *è* $[0,1]$. *Conoscendo le immagini dei punti fondamentali, e ricordando che la traccia della matrice associata ad un'involuzione è uguale a* 0, *si trova subito la matrice associata ad α*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

In coordinate non omogenee, l'involuzione α è data da $x' = \dfrac{x+2}{x-1}$ *, oppure* $xx' - x - x' - 2 = 0.$

Ponendo x = x' si trova che i punti uniti sono $1 \pm \sqrt{3}$.

5. Studiare la proiettività θ: $P^2(R) \to P^2(R)$ di equazioni:

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

tutti i suoi punti uniti e le sue rette unite. Verificare che θ **non** induce un'affinità sul piano affine identificato con l'insieme complementare della retta $x_3 = 0$.

La matrice della proiettività θ possiede l'autovalore semplice –1, *e l'autovalore doppio* 1, con molteplicità geometrica uguale a 1, *quindi θ ha soltanto due punti uniti e due rette unite. Il punto unito relativo all'autovalore semplice* –1 *è* [–1,1,1], *quello relativo all'autovalore doppio* 1 *è* [0,0,1]. *Le coordinate duali delle rette unite sono date dagli autovettori della matrice trasposta; si trova per l'autovalore semplice la retta di coordinate duali* [1,–1,0] *e di equazione cartesiana* $x_1 - x_2 = 0$ *(soddisfatta solo dal punto unito "doppio") mentre per l'autovalore semplice si trova la retta di coordinate duali* [1,1,0], *di equazione cartesiana* $x_1 + x_2 = 0$, *che congiunge i due punti uniti.*

θ ***non*** *induce un'affinità sul piano affine, identificato con l'insieme complementare della retta* $x_3 = 0$, *perché θ non tiene unita la retta impropria: infatti, θ applica i punti* [a,b,0] *della retta* $x_3 = 0$ *sui punti* [b,a,2a] *della retta* $x'_3 = 2x'_2$ *mentre la retta* $x'_3 = 0$ *è immagine della retta* $2x_1 + x_3 = 0$.

6. Studiare la conica della polarità piana definita dalla matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -16 \end{pmatrix}$, determinandone il tipo affine ed i diametri. Verificare che alla conica appartiene il punto [0,2,1] e trovare la tangente alla conica in questo punto.

Essendo la matrice non singolare, la conica è non specializzata. Le intersezioni della conica con la retta impropria, date dal sistema $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 = 0 \end{cases}$, *sono coincidenti, perciò la conica è tangente alla retta impropria, cioè è una parabola. Ne segue che i diametri (polari dei punti impropri), formano un fascio di rette parallele, dovendo passare per il polo della retta impropria, che è il punto in cui questa tocca la parabola. Infatti, la polare del punto* [*α*,*β*,0] *è la retta di equazione* $x_1(\alpha + 2\beta) + x_2(2\alpha + 4\beta) + \alpha x_3 = 0$, *che nel caso del punto improprio della parabola, per cui è* $\alpha + 2\beta = 0$, *si riduce alla retta impropria, mentre per tutti gli altri punti impropri è, in coordinate non omogenee*

$$x + 2y + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} = 0.$$

Sostituendo 0 *a x e* 2 *a y nel primo membro dell'equazione* $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 16 = 0$ *si trova* 0 + 16 + 0 – 16 , *quindi il punto* (0,2) *appartiene alla parabola; la sua polare (tangente) è la retta di equazione* $5x + 8y - 16 = 0$.