Sulla prova di Geometria proiettiva del 19 luglio 2011

Per una svista (che preferisco non commentare) il testo dell'esercizio A era incompleto; mancava la richiesta della dimostrazione della proposizione duale. Tuttavia, solo uno degli otto compiti consegnati conteneva uno svolgimento corretto della parte A. Vista la difficoltà che la nozione di dualità nel piano sembra presentare, forse per la necessità di distinguere tra gli elementi che costituiscono una forma di prima specie (punti P sulla retta r, rette s nel fascio individuato dal punto R), mostro un esempio dettagliato di svolgimento della parte A, e qualche osservazione sulla parti restanti (in una delle quattro versioni del compito). Consultare anche Beltrametti etc., esempio 1.6.10 pag. 40, Definizione 4.3.1 pag. 126-**127.**

(A) Si ricordi che, date in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ due rette distinte *r, r',* preso un punto *O* che non appartenga a nessuna delle due, si chiama *prospettività* di centro *O* l'applicazione π_O: $r \to r'$ definita ponendo

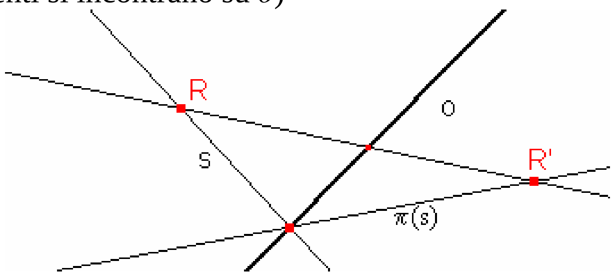
$$\pi_O(P) = r' \cap J(O,P).$$

Vale la **proposizione**: *una proiettività* α*:* $r \to r'$ *è una prospettività se e solo se, posto* $X = r \cap r'$*, si ha* $\alpha(X) = X$*.*
Usare la relazione di dualità per definire le prospettività tra due fasci di rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e per enunciare la proposizione che caratterizza le prospettività tra fasci.

Dati nel piano proiettivo due fasci ρ*,* ρ' *di rette, i cui centri sono due punti distinti R, R', presa una retta o, che non passi per nessuno dei due punti, si chiama prospettività di asse o l'applicazione* π_o*:* $\rho \to \rho'$ *definita ponendo, per ogni retta s per R,*

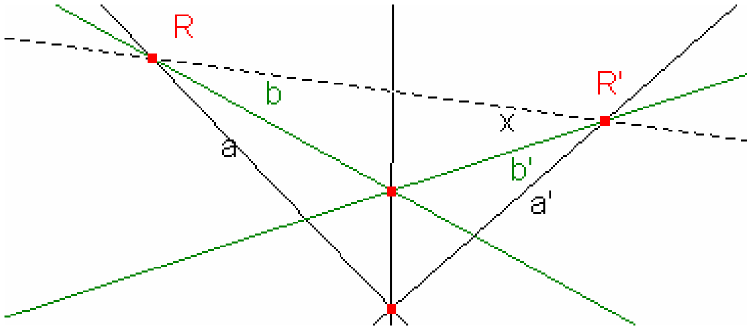
$$\pi_o(s) = J(R', o \cap s).$$

(Cioè: rette corrispondenti si incontrano su *o*)



Proposizione: una proiettività tra fasci di rette di centri R, R', α*:* $\rho \to \rho'$*, è una prospettività se e solo se, posto x = J(R, R'), si ha* $\alpha(x) = x$*.*
Per la dimostrazione:

1. *se* α *è una prospettività di asse o, allora la retta dei due punti R,R' ha come immagine se stessa.*
2. *Per il teorema fondamentale sulle proiettività di* $\mathbb{P}^1$ *(e sulle proiettività tra forme di prima specie), esiste una sola proiettività che mandi tre rette distinte a, b, c di un fascio in tre rette assegnate dell'altro. Siano a, b due rette distinte per R, e siano a', b' le loro corrispondenti nella proiettività* α *data, che per ipotesi manda x in x.*



Chiamiamo o la retta che congiunge i punti di intersezione tra a e a', tra b e b'. La prospettività di asse o manda a, b, x rispettivamente in a', b', x, quindi coincide con α.

(B) Studiare la proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in sé associata alla matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinandone i punti uniti e le rette unite. Considerare l'affinità definita restringendo questa proiettività al complementare della retta $x_3 = 0$ e stabilire se sia una similitudine o una particolare isometria.

La proiettività è un'omologia, che ha come asse la retta $x_3 = 0$ *e come centro il punto* $[-3,-12,1]$.
L'affinità associata è quindi un'omotetia, di centro $[-3,-12]$, *dunque una similitudine, come si verifica scrivendone le equazioni in coordinate affini:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(C) Nello spazio $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ è dato l'iperpiano σ, di equazione $x_1 + 4x_3 - x_4 = 0$.
Determinare quale dimensione debba avere un sottospazio proiettivo τ che soddisfa entrambe le condizioni:

a) non è contenuto in σ
b) la sua intersezione con σ è il sottospazio ψ di equazioni $x_1 = x_3 = x_4 = 0$.

Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane di un sottospazio τ con le proprietà a e b.

La condizione a) comporta che lo spazio congiungente J(σ,τ) *contenga strettamente* σ, *quindi coincida con lo spazio ambiente. La condizione b) fornisce la dimensione dello spazio* $\sigma \cap \tau$ *:* $\dim(\sigma \cap \tau) = \dim(\psi) = 1$. *Ne segue che la dimensione di* τ *è* 2. *Per costruire* τ *si possono prendere due punti che generino la retta* ψ *ed un punto fuori da* σ; *per esempio, si possono prendere i punti fondamentali* A_2, A_5 *e* A_3, *ottenendo il piano di equazioni cartesiane* $x_1 = x_4 = 0$.