Geometria analitica e algebra lineare
Prova scritta del 21 febbraio 2012

Nome e cognome ______________________________ n. matricola________________

Scrivere nome e cognome **in testa ad ogni foglio**. **Consegnare questo foglio.** La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. **Risposte prive di spiegazioni NON sono sufficienti.**

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[t]$ dei polinomi a coefficienti reali, in una variabile t, di grado non superiore a 2, si consideri il sottospazio F generato dal polinomio $p(t) = 1 + 2t^2$. Trovare un sottospazio G supplementare di F, cioè tale che sia $\mathbb{R}_2[t] = F \oplus G$.

(punti 4)

2. Per ciascun numero reale k, sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+(k-1)y^2+z \\ y-z+k(k-1) \\ x+y+(1-k)z \\ x+z \end{pmatrix}$.

i) Esistono valori di k per i quali T_k sia un'applicazione lineare di spazi vettoriali?
ii) Per un valore k^* per il quale T_{k^*} sia lineare,
   a. scrivere la matrice associata a T_{k^*} rispetto alle basi canoniche;
   b. stabilire se T_{k^*}, è iniettiva, se è surgettiva,
   c. trovare una base di Im T_{k^*}.
   d. posto $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}$, determinare tutti i valori delle coordinate b, c per i quali $T_{k^*}^{-1}(\mathbf{u})$ (insieme delle controimmagini di $\mathbf{u}$) non è vuoto; in quei casi, trovare tutti gli elementi di $T_{k^*}^{-1}(\mathbf{u})$ e stabilire se $T_{k^*}^{-1}(\mathbf{u})$ sia un sottospazio vettoriale.

(punti 1 + 1 + 2 + 1 + 3)

3. Nello spazio sono assegnate le rette: r, di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$, s, di equazioni parametriche, nel parametro t, $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases}$.

i) Stabilire se le due rette sono sghembe o complanari.
ii) Scrivere un'equazione cartesiana del piano che è parallelo a r ed s e passa per (1,0,1).
iii) Trovare la distanza di (1,0,1) da s.

(punti 3 + 2 + 3)

4. Trovare il centro e il raggio della circonferenza C di equazioni $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y-24=0 \\ x+z+4\sqrt{2}=0 \end{cases}$.

(punti 4)

5. Studiare la conica che è l'intersezione del piano $z = 0$ con la quadrica Q, di equazione $2x^2+8\sqrt{2}x+y^2-2y+8=0$, determinando il centro, gli assi, i vertici e delle equazioni parametriche di tale conica.
Dallo studio delle sezioni di Q con i piani paralleli a $z = 0$ ricavare il tipo e delle equazioni parametriche di Q.

(punti 6)

Esercizio facoltativo. Senza determinarle, dimostrare che le intersezioni delle due coniche $4x^2+y^2-1=0$, $x^2+64y^2-16=0$ giacciono su una circonferenza.