

“Geometria analitica e algebra lineare” anno accademico 2010/11

1. Relazioni di equivalenza. Classi di equivalenza, insieme quoziente. Vettori geometrici applicati in un punto dello spazio, operazioni di somma e prodotto per uno scalare. Vettori liberi. Coordinate di un vettore rispetto ad una base. Equazioni vettoriali e parametriche di rette e di piani.
2. Sistemi lineari: il problema della compatibilità. Matrice dei coefficienti, matrice completa. Sistemi quadrati, matrici triangolari alte. Il metodo di eliminazione di Gauss. Matrici non singolari. Sistemi quadrati con matrice non singolare.
3. Le operazioni di somma e prodotto per un numero reale in \mathbb{R}^n . Gruppi, campi. Definizione di spazio vettoriale su un campo K . Esempi: lo spazio $K[t]$ dei polinomi in una variabile con coefficienti in K , lo spazio delle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} , lo spazio vettoriale delle matrici di tipo (m,n) . Sottospazi vettoriali. Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite formano un sottospazio di \mathbb{R}^n . Combinazioni lineari. L'insieme di tutte le combinazioni lineari di s vettori fissati in uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V . Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema lineare sia compatibile: il vettore dei termini noti appartiene al sottospazio generato dai vettori colonna della matrice dei coefficienti. Vettori linearmente dipendenti. Condizione di allineamento di tre punti. Basi. Se c 'è una base, ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base. Sistemi massimali di vettori linearmente indipendenti; ogni spazio finitamente generato ha una base. Teorema del completamento. Se uno spazio vettoriale ha una base formata da n vettori, ogni altra base è di n vettori; definizione di dimensione. Intersezione di sottospazi; definizione di sottospazio somma. Teorema di Grassmann. Somma diretta e sottospazi supplementari.
4. L'applicazione L_A associata ad una matrice A . Definizione di applicazione lineare. Nucleo e Immagine di un'applicazione lineare. Rango o dimensione dell'immagine; teorema delle dimensioni e sue conseguenze. Il teorema di Rouché-Capelli. Ricerca delle soluzioni di un sistema lineare tramite la riduzione di Gauss. Matrici a scalini, pivot. Il rango di una matrice a scalini. Il rango di una matrice è uguale al numero dei pivot di una sua *qualsiasi* riduzione a scala. Sottospazi affini, giacitura, relazione di parallelismo tra sottospazi affini, equazioni parametriche e equazioni cartesiane. Il caso dello spazio tridimensionale: equazioni di rette, di piani.
5. Rette nel piano; equazione cartesiana del fascio delle rette per un punto. Fasci di rette, propri ed impropri. Nello spazio: stelle di rette, stelle di piani, fascio di piani. Uso del fascio di piani per determinare il piano che contiene una retta ed è sottoposto a certe condizioni. Condizioni perché due rette, nella forma cartesiana, siano sghembe, siano parallele.
6. Spazi vettoriali di applicazioni lineari. Applicazioni lineari invertibili. Spazi vettoriali isomorfi. Composizione di applicazioni e prodotto di matrici. Il prodotto righe per colonne e le sue proprietà. Matrici invertibili. A è invertibile se e soltanto se è non singolare. Il calcolo della matrice inversa. Matrice di un cambiamento di base. Relazione tra le matrici associate ad una stessa trasformazione lineare. Il determinante di una matrice di ordine 2, interpretazione come area di un parallelogrammo. Proprietà che definiscono il determinante. Definizione ricorsiva di determinante. Senza dimostrazione: esistenza e unicità del determinante, teoremi di Laplace. Dimostrazione di alcune conseguenze delle proprietà che definiscono il determinante: alternanza, effetto delle operazioni elementari (su righe e colonne), una matrice è non singolare se e solo se il suo determinante è diverso da zero, teorema degli orlati. Senza dimostrazione: $\det(A) = \det(A^T)$, teorema di Binet. Uso dei determinanti in geometria analitica: equazione di una retta per due punti nel piano, equazione del piano per tre punti nello spazio, condizioni di allineamento e di complanarità, condizione perché due rette siano sghembe.
7. Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche: distanza di due punti, coseno dell'angolo di due vettori, prodotto scalare. Prodotto scalare canonico in \mathbb{R}^n , sue proprietà. Definizione di spazio vettoriale euclideo o metrico. Vettori ortogonali. Famiglie di vettori a due a due ortogonali tra loro, basi ortogonali, basi ortonormali. Basi concordemente orientate. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, definizione di coseno dell'angolo di due vettori. Proiezione ortogonale di un vettore su un altro, in \mathbb{R}^3 . Distanze, isometrie di spazi vettoriali metrici, isometrie di \mathbb{R}^n , matrici ortogonali, il caso del piano. Sistemi di riferimento in \mathbb{R}^3 , sistemi affini e orientazione, cambiamenti di coordinate, cambiamenti di coordinate ortogonali monometriche. Uso del prodotto scalare per calcolare l'angolo di due rette orientate, condizione di perpendicolarità tra rette. Equazione del piano per un punto perpendicolare ad una data retta, proiezione ortogonale di un punto su una retta, su un piano, distanza di un punto da una retta, da un piano; piani orientati, angolo di piani orientati, angolo tra retta e piano orientati. Uso del prodotto scalare per calcolare la distanza di

un punto da un piano; problemi su distanze e angoli nel piano euclideo, da trattare in analogia al caso tridimensionale. Prodotto vettoriale, prodotto misto, volume del parallelepipedo.

8. Autovettori e autovalori. Autospazi. Basi di autovettori, endomorfismi diagonalizzabili. Esistono autovettori se e solo se l'endomorfismo $T - k \text{Id}$ è non iniettivo. Polinomio caratteristico. Matrici simili hanno gli stessi autovalori. Autovettori relativi ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti (dimostrazione per induzione). Corollario: se una matrice di ordine n ha n autovalori distinti, è diagonalizzabile. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore; la seconda non supera la prima (dimostrazione). Criterio di diagonalizzabilità. Il caso delle matrici simmetriche reali (senza dimostrazione).

9. Insiemi di punti del piano definiti attraverso relazioni tra distanze: circonferenza, ellisse, iperbole, parabola. Equazioni canoniche cartesiane ed parametriche di queste curve. Ellisse, parabola, iperbole come luoghi di punti le cui distanze da un punto fisso e una retta fissa sono in rapporto costante (eccentricità). Il problema della classificazione delle curve di secondo ordine. Classificazione metrica delle coniche, uso di invarianti e del teorema spettrale nella dimostrazione del teorema di classificazione. Centri, assi, rette asintotiche, asintoti, rette secanti, tangenti, esterne. Quadriche: sfere, coni, cilindri, classificazione, sezioni piane di quadriche.

Testi.

Il testo di riferimento principale è

Marco Abate – Chiara de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, McGraw-Hill, Milano, 2006.

Da questo testo sono stati omessi vari paragrafi, in particolare:

- i paragrafi del cap. 4 sui numeri complessi e il teorema fondamentale dell'algebra
- il lemma 5.10 e la prop. 5.11, pag. 92 - 94; per la dimostrazione della seconda parte della prop. 5.11, sul rango della matrice trasposta, si veda sotto;
- tutte le considerazioni sulle matrici triangolabili, nel cap. 13
- tutto il capitolo 14, di cui si è solo enunciato del teorema spettrale (teo. 14.3 e corollario, pag. 267)
- nel cap. 15, il n. 15. 3 sui fasci di coniche; la dimostrazione del n. 15. 2, sulla classificazione, sono state adattate al caso delle coniche.

Esercizi e notizie. In questo anno accademico, viene utilizzato il supporto della piattaforma <http://elea.linguistica.unical.it/moodle/>. Sulla piattaforma sono reperibili esercizi, quiz e informazioni sul corso; alcune risorse sono disponibili anche a utenti ospiti. Ogni studente dell'anno accademico 2010//11 deve iscriversi al corso andando alla pagina web sopra indicata, e utilizzando la password che è stata fornita nel primo giorno di lezione. L'iscrizione alla piattaforma è requisito per l'attestazione della frequenza in questo anno accademico.

Appendice.

Dal teorema sul rango di una matrice (6.3 in Abate – de Fabritiis), deduciamo la Prop. 5.11(ii) del testo.

Teorema: per qualunque matrice \mathbf{A} , il massimo numero di colonne linearmente indipendenti è uguale al massimo numero di righe linearmente indipendenti; cioè: il rango di \mathbf{A} è uguale al numero delle righe indipendenti di \mathbf{A} (detto anche "rango per righe"); in sintesi:

$$\text{rango di } \mathbf{A} = \text{rango di } \mathbf{A}^T.$$

Dimostrazione. Per una qualunque matrice \mathbf{A} , il procedimento di riduzione a scalini consiste in operazioni sulle righe di \mathbf{A} , di tre tipi:

- a) scambio di righe
- b) moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo
- c) sostituzione di una riga \mathbf{a}_i con una somma $\mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j$ (k scalare diverso da 0).

Nessuna di queste operazioni influenza lo spazio vettoriale generato dalle righe; in particolare, riguardo alla terza, è

$$\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m) = \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m).$$

Indichiamo con \mathbf{S} una riduzione a scalini di \mathbf{A} , e indichiamo con r il rango di \mathbf{S} ; abbiamo dimostrato (teorema del rango) che r è il numero dei pivot di \mathbf{S} e che il rango di \mathbf{A} è uguale a r . Indichiamo con $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m$ le righe della matrice a scalini \mathbf{S} ; le ultime $m-r$ sono tutte formate da zeri, le prime r sono tra loro linearmente indipendenti. Possiamo concludere che si ha:

$$\dim(\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)) = \dim(\text{Span}(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m)) = r.$$

C.v.d.

Rende, 11 febbraio '11