1 Eventi e relazioni tra essi

Definizione 1 *Un evento E è una proposizione, un'affermazione, che non sappiamo ancora se sia vera o falsa.*

Definizione 2 *Dati due eventi E e F, scriveremo che $E \vdash F$ se l'affermazione rappresentata da E* implica *quella rappresentata da F. Equivalentemente scriveremo $F \dashv E$ se l'affermazione rappresenta da F* è conseguenza *di quella rappresentata da E.*

E' chiaro che se l'evento E implica l'evento F, allora F è conseguenza di E, perciò scrivere $E \vdash F$ è lo stesso che scrivere $F \dashv E$.

Ovviamente, un evento E implica sempre se stesso, come pure è sempre conseguenza di se stesso; quindi, dato un qualsiasi evento E si ha sempre che $E \vdash E$ e $E \dashv E$.

Allora, dati due eventi E e F, se vale sia $E \vdash F$ che $F \vdash E$, ovvero sia $F \dashv E$ che $E \dashv F$, scriveremo che $E = F$, cioè E e F rappresentano la stessa affermazione.

Le relazione tra eventi $\vdash$ gode della proprietà transitiva. Infatti, dati gli eventi E, F e G, se E implica F e F implica G allora E implica G, ovvero più formalmente se $E \vdash F$ e $F \vdash G$, allora $E \vdash G$. Rileggengo da destra verso sinistra queste affermazioni si ha che $G \dashv F$ (G è conseguenza di F), $F \dashv E$ (F è conseguenza di E) allora $G \dashv E$ (G è conseguenza di E) e quindi la relazione tra eventi $\dashv$ gode anch'essa della proprietà transitiva, come appariva chiaro dal fatto che scrivere $F \dashv E$ è lo stesso che scrivere $E \vdash F$.

Definizione 3 *Due eventi E e F si diranno* incompatibili *se il verificarsi di uno implica il non verificarsi dell'atro, ovvero se non esiste alcun evento G che rappresenta un affermazione che implica quelle rappresentate rispettivamente da E e da F. Più formalmente, gli eventi E e F si diranno incompatibili se non esiste alcun evento G tale che $G \vdash E$ e $G \vdash F$.*

Due eventi E e F che non sono incompatibili si diranno compatibili.

Ovviamente ogni evento E è compatibile con se stesso.

Definizione 4 *Dato un evento E denoteremo con $\overline{E}$ l'evento* complementare *di E, ovvero l'evento F incompatibile con E tale che non esiste alcun evento G che rappresenta un'affermazione conseguenza di F che sia incompatibile con E. Più formalmente, dato un evento E, l'evento complementare $\overline{E}$ è quell'evento incompatibile con E tale che non esiste alcun evento $G \dashv \overline{E}$ che sia incompatibile con E.*

Dalla definizione precedente segue subito che l'evento complementare di $\overline{E}$ è proprio E, ovvero più formalmente che $\overline{\overline{E}} = E$ e che se se $E \vdash F$ allora $\overline{F} \vdash \overline{E}$.

Perciò, se E rappresenta una certa affermazione $\overline{E}$ ne rappresenta la negazione.

Definizione 5 *Dati due eventi E e F, denoteremo con $E \vee F$ l'evento G tale che $E \vdash G$ e $F \vdash G$, ma non esiste nessun altro evento H tale che $H \vdash G$ per cui vale che $E \vdash H$ e $F \vdash H$.*

Dalla definizione precedente segue che $E \vee F = F \vee E$ e in particolare che se $E \vdash F, E \vee F = F$, perciò si ha la tautologia $E = E \vee E$.

Definizione 6 *Dati due eventi compatibili E e F, denoteremo con $E \wedge F$ l'evento G tale che $E \dashv G$ e $F \dashv G$, ma non esiste nessun altro evento H tale che $H \dashv G$ per cui vale che $E \dashv H$ e $F \dashv H$.*

Dalla definizione precedente segue che $E \wedge F = F \wedge E$ e in particolare che se $E \vdash F, E \wedge F = E$, perciò si ha la tautologia $E = E \wedge E$.

Inoltre dati due eventi compatibili E e F, dalla definizione di evento complementare segue che $\overline{(E \wedge F)} = \overline{E} \vee \overline{F}$ e quindi, scambiando E con $\overline{E}$ e F con $\overline{F}$, che $\overline{(E \vee F)} = \left(\overline{E} \wedge \overline{F}\right)$.

Se E e F sono eventi incompatibili allora, dalla definizione di evento complementare segue che $E \vdash \overline{F}$ e $F \vdash \overline{E}$. Perciò, $E \wedge \overline{F} \vdash E$, ma $E \vdash E \wedge \overline{F}$, ovvero $E = E \wedge \overline{F}$. Allo stesso modo si ha che $F = F \wedge \overline{E}$.

2 Probabilità di un evento

Al fine di valutare il grado di fiducia che riponiamo nel verificarsi dell'evento E, supponiamo di essere disposti ad accettare la scommessa proposta da un competitore di corrispondergli un premio pari a S Euro, dove S è la posta fissata dal competitore, in cambio dell'acquisto da parte sua di un obbligazione che, esibita al momento del verificarsi di E, gli permetta di incassare la posta.

A quale prezzo $p(E)$ potrò vendere tale l'obbligazione?

Certamente $p(E)$ dovrà essere minore di S, altrimenti in caso di vittoria il competitore non riotterrebbe nemmeno il denaro speso per l'acquisto dell'obbligazione, dato che $p(E) - S > 0$. Perciò dovrò fissare il prezzo dell'obbligazione pari ad una frazione della posta, ovvero pari a $P(E)\,S$. Pertanto il guadagno del competitore $\mathbf{G}(E)$ derivante dalla scommessa sarà pari a

$$\mathbf{G}(E) = \begin{cases} (1 - P(E))\,S & \text{se } E \text{ si verifica} \\ -P(E)\,S & \text{se } E \text{ non si verifica} \end{cases} . \tag{1}$$

Come già affermato, è chiaro che, perché la scommessa risulti accettabile, $P(E)$ dovrà essere un numero compreso tra 0 e 1, poiché se fosse maggiore di 1 la scommessa gli garantirebbe una perdita certa indipendentemente dal valore della posta in gioco. $P(E)$ quindi rappresenta il grado di fiducia che ripongo nell'accadere dell'evento E: più il mio grado di fiducia sarà alto maggiore sarà il prezzo $p(E) := P(E)S$ a cui sarò disposto a mettere in vendita l'obbligazione.

Definizione 7 *Dato un evento E, il numero $P(E) \in [0,1]$ che rappresenta il grado di fiducia che un individuo ripone nell'accadere di E è detto* probabilità *dell'evento E.*

Definizione 8 *Un evento E tale che $P(E) = 1$ è detto* certo*. Un evento E tale che $P(E) = 0$ è detto* impossibile*.*

Se lo scommettitore volesse scommettere anche sul vericarsi dell'evento $\overline{E}$ fissando la stessa posta S il suo guadagno totale, ottenuto sommando $\mathbf{G}(E)$ e $\mathbf{G}\left(\overline{E}\right)$, dalla 1 risulterebbe pari a

$$\begin{aligned}(1 - P(E))\, S - P\left(\overline{E}\right) S &= \left(1 - P\left(\overline{E}\right)\right) S - P(E)\, S \\ &= \left(1 - P(E) - P\left(\overline{E}\right)\right) S \ .\end{aligned}$$

E' chiaro che se $1 - P(E) - P\left(\overline{E}\right) > 0$ lo scommettitore avrebbe un guadagno certo tanto più grande quanto più è grande la posta S. Allo stesso, modo se invece $1 - P(E) - P\left(\overline{E}\right) < 0$ lo scommettitore incorrerebbe in una perdita certa (in favore di chi accettasse le scommesse sul verificarsi di E e $\overline{E}$) tanto più grande quanto più è grande la posta S. Perciò, in ambedue i casi, ci sarebbe qualcuno che realizzerebbe un guadagno senza rischio, in termini economici si direbbe che si è in una condizione di *arbitraggio.* Perciò, perché il rischio associato alla scommessa continui ad essere equamente ripartito tra le parti dev'essere che il guadagno totale dello scommettitore sia nullo indipendentemente dal valore della posta S, cioè

$$(1 - P(E))\, S - P\left(\overline{E}\right) S = \left(1 - P\left(\overline{E}\right)\right) S - P(E)\, S = 0$$

da cui segue che $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E)$ ovvero $P(E) = 1 - P\left(\overline{E}\right)$.

Dalla definizione di probabilità segue che, dati due eventi E e F, dire che E implica F, ovvero scrivere $E \vdash F$, vuol dire che se si verifica E allora si verifica anche F. Perciò il grado di fiducia che si ripone nel verificarsi di F dev'essere maggiore di quello che si ripone nel verificarsi di E, ovvero che $P(E) \leq P(F)$.

3 La collezione di tutti gli eventi e la loro probabilità

Denotiamo con Ω l'evento certo e con $\varnothing$ l'evento impossibile.

Dato un evento E, per definizione di evento complementare, l'evento $\left(E \vee \overline{E}\right)$ è quello che indica che si verifichi o meno l'affermazione rappresentata da E. Perciò, per ogni evento $E, E \vee \overline{E} = \Omega$. Quindi

$$P\left(E \vee \overline{E}\right) = P(\Omega) = 1 = P(E) + P\left(\overline{E}\right) \ .$$

In particolare, ponendo $E = \Omega$ si ottiene che $P\left(\overline{\Omega}\right) = P(\varnothing) = 0$. Perciò possiamo assumere che $\overline{\Omega} = \varnothing$.

Possiamo allora estendere l'operazione $\wedge$ ad eventi incompatibili assumendo che $\varnothing$ sia incompatibile con qualsiasi evento e ponendo $E \wedge F = \varnothing$ se E e F sono incompatibili.

Per semplicità di notazione continueremo a denotare l'estensione di $\wedge$ con lo stesso simbolo.

Sia $\mathcal{E}$ la collezione di tutti eventi. Notiamo che per la Definizione 5 e per la Definizione 6 rispettivamente, le operazioni $\vee : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ e $\wedge : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ sono simmetriche nello scambio degli argomenti, ovvero godono della proprietà commutativa. Inoltre, ambedue queste operazioni godono della proprietà associativa. Infatti, siccome $E \vdash (E \vee F) \vee G, F \vdash (E \vee F) \vee G$ e $G \vdash (E \vee F) \vee G$, si ha che $(F \vee G) \vdash (E \vee F) \vee G$, quindi $E \vee (F \vee G) \vdash (E \vee F) \vee G$. Allo stesso modo, scambiando E con G, si otterrebbe $(E \vee F) \vee G \vdash E \vee (F \vee G)$,da cui segue che $(E \vee F) \vee G = E \vee (F \vee G)$. D'altra parte, $(E \wedge F) \wedge G \vdash E$ e $(E \wedge F) \wedge G \vdash (F \wedge G)$, perciò $(E \wedge F) \wedge G \vdash E \wedge (F \wedge G)$, ma scambiando E con G si ottiene $(G \wedge F) \wedge E \vdash G \wedge (F \wedge E)$, ovvero $(E \wedge F) \wedge G = E \wedge (F \wedge G)$.

Proposizione 9 *L'operazione $\wedge$ gode della proprietà distributiva rispetto all'operazione $\vee$ e viceversa.*

Dimostrazione. Dati gli eventi E, F e G, si ha che $(E \wedge G) \vee (F \wedge G) \vdash (E \vee F) \wedge G$, poiché sia $(E \wedge G) \vdash (E \vee F) \wedge G$ che $(F \wedge G) \vdash (E \vee F) \wedge G$. D'altronde, se $H \vdash (E \vee F) \wedge G$, dev'essere che $H \vdash E \wedge G$, oppure $H \vdash F \wedge G$. Perciò $(E \wedge G) \vee (F \wedge G) = (E \vee F) \wedge G$. Considerando gli eventi complementari di ambo i membri di quest'uguaglianza si ottiene

$$\begin{aligned} \overline{(E \wedge G) \vee (F \wedge G)} &= \overline{(E \wedge G)} \wedge \overline{(F \wedge G)} = \big(\overline{E} \vee \overline{G}\big) \wedge \big(\overline{F} \vee \overline{G}\big) \ , \\ \overline{(E \vee F) \wedge G} &= \overline{(E \vee F)} \vee \overline{G} = \big(\overline{E} \wedge \overline{F}\big) \vee \overline{G} \ , \end{aligned}$$

da cui segue

$$\big(\overline{E} \vee \overline{G}\big) \wedge \big(\overline{F} \vee \overline{G}\big) = \big(\overline{E} \wedge \overline{F}\big) \vee \overline{G} \ .$$

Perciò sostituendo nell'ultima uguaglianza E a $\overline{E}, F$ a $\overline{F}$ e G a $\overline{G}$ si ha la tesi. ■

Proposizione 10 *Dati due eventi E e F, l'evento $E \vee F = \big(E \wedge \overline{F}\big) \vee (E \wedge F) \vee \big(F \wedge \overline{E}\big)$ dove i tre eventi che compaiono a destra dell'uguaglianza sono tutti tra loro incompatibili.*

Dimostrazione. Poiché per definizione $E \wedge \overline{F}$ è incompatibile con F, siccome $E \wedge F$ implica F, si ha che $E \wedge \overline{F}$ è incompatibile con $E \wedge F$. Scambiando E con F si ottiene anche che $F \wedge \overline{E}$ è incompatibile con $F \wedge E = E \wedge F$. Pertanto gli eventi $E \wedge \overline{F}, E \wedge F$ e $F \wedge \overline{E}$ sono tutti tra loro incompatibili. Inoltre, $E \wedge \overline{F} \vdash E$ e $E \wedge F \vdash E$ quindi $\big(E \wedge \overline{F}\big) \vee (E \wedge F) \vdash E$. Ma per definizione di $\vee, \wedge$ e di evento complementare, $\big(E \wedge \overline{F}\big) \vee (E \wedge F) = E$. Allo stesso modo segue che $F = (E \wedge F) \vee \big(F \wedge \overline{E}\big)$. Perciò,

$$\begin{aligned} \big(E \wedge \overline{F}\big) \vee (E \wedge F) \vee \big(F \wedge \overline{E}\big) &= \big(E \wedge \overline{F}\big) \vee ((E \wedge F) \vee (E \wedge F)) \vee \big(F \wedge \overline{E}\big) \\ &= \big(\big(E \wedge \overline{F}\big) \vee (E \wedge F)\big) \vee \big((F \wedge E) \vee \big(F \wedge \overline{E}\big)\big) = E \vee F \ . \end{aligned}$$

$\blacksquare$

In generale, dati due eventi incompatibili E e F, se lo scommettitore volesse scommettere anche sul vericarsi dell'evento $(E \vee F)$, fissando la stessa posta S, dalla (1) il suo guadagno totale risulterebbe pari a

$$\mathbf{G}(E \vee F) = \begin{cases} S - P(E)S - P(F)S & \text{se si verifica } E \text{ o si verifica } F \\ -P(E)S - P(F)S & \text{se non si verifica né } E \text{ né } F \end{cases},$$

da cui segue che in tal caso $P(E \vee F) = P(E) + P(F)$. Perciò, dalla proposizione precedente si ha che, dati due eventi E e F qualunque,

$$\begin{aligned} P(E \vee F) &= P\left(\left(E \wedge \overline{F}\right) \vee (E \wedge F) \vee \left(F \wedge \overline{E}\right)\right) = P\left(E \wedge \overline{F}\right) + P(E \wedge F) + P\left(F \wedge \overline{E}\right) \\ &= P(E) + P\left(F \wedge \overline{E}\right) = P\left(E \wedge \overline{F}\right) + P(F) \leq P(E) + P(F) . \end{aligned}$$

Ricapitolando, la relazione $\vdash$ data sulla collezione $\mathcal{E}$ di tutti gli eventi è una relazione d'ordine parziale[1] (la relazione $\dashv$ come abbiamo visto definisce la stessa relazione d'ordine parziale di $\vdash$, quindi basta considerare solo una delle due). Ω è il massimo di $\mathcal{E}$ rispetto a alla relazione $\vdash$, dato che, poiché $\forall E \in \mathcal{E}, \Omega = E \vee \overline{E}, E \vdash \Omega$. Inoltre, $\varnothing$ è il minimo di $\mathcal{E}$ rispetto a alla relazione $\vdash$, dato che, poiché $\forall E \in \mathcal{E}, \overline{E} \vdash \Omega$ allora $\varnothing = \overline{\Omega} \vdash \overline{\overline{E}} = E$. Sull'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{E}, \vdash)$ è definita l'involuzione $\mathcal{E} \ni E \longmapsto \overline{E} \in \mathcal{E}$ e le operazioni binarie $\vee$ e $\wedge : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ idempotenti (ovvero tali che, $\forall E \in \mathcal{E}, E \vee E = E \wedge E = E$) e che godono delle proprietà commutativa, associativa edistributiva di una rispetto all'altra, nonché della proprietà di assorbimento ($\forall E, F \in \mathcal{E}, E \wedge (E \vee F) = E \vee (E \wedge F) = E$) per cui $\varnothing$ è l'elemento neutro di $\vee$ ($\forall E \in \mathcal{E}, E \vee \varnothing = E$) che annichila $\wedge$ ($\forall E \in \mathcal{E}, E \wedge \varnothing = \varnothing$) e Ω è l'elemento neutro di $\wedge$ ($\forall E \in \mathcal{E}, E \wedge \Omega = E$) che annichila $\vee$ ($\forall E \in \mathcal{E}, E \vee \Omega = \Omega$). Inoltre, la relazione d'incompatibilità tra gli elementi di $\mathcal{E}$ si può esprimere richiedendo che ogni coppia di eventi incompatibili appartenga a $\{(E, F) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} : E \wedge F = \varnothing\}$.

Da ciò segue che la collezione di tutti gli eventi $\mathcal{E}$ si può rappresentare come la collezione $\mathcal{P}(\Omega)$ (più rigorosamente come l'algebra di Boole) di tutti i sottoinsiemi di Ω, compreso l'insieme vuoto, giacché a questo si può associare l'evento impossibile $\varnothing$, alla relazione d'ordine $\vdash$ si può associare la relazione tra insiemi $\subseteq$ (equivalentemente alla relazione d'ordine $\dashv$ si può associare la relazione tra insiemi $\supseteq$), alle relazioni $\vee$

[1] Si definisce *relazione binaria* $\mathfrak{r}$ tra due insiemi non vuoti A e B un sottoinsieme $\mathcal{R}_{\mathfrak{r}}$ del prodotto cartesiano $A \times B . x \in A$ e $y \in B$ sono messi in relazione da $\mathfrak{r}$, e in tal caso si scrive $x \mathfrak{r} y$ se $(x, y) \in \mathcal{R}_{\mathfrak{r}}$.

In particolare, se $B = A$, una relazione $\mathfrak{r}$ che sia:

- riflessiva, ovvero $\forall x \in A, x \mathfrak{r} x$;
- antisimmetrica, ovvero se $\forall x, y \in A, x \mathfrak{r} y$ e $y \mathfrak{r} x$ allora $x = y$;
- transitiva, ovvero se $\forall x, y, z \in A, x \mathfrak{r} y$ e $y \mathfrak{r} z$ allora $x \mathfrak{r} z$.

è una relazione d'ordine parziale.

e $\wedge$ si possono associare rispettivamente le relazioni tra insiemi $\cup$ e $\cap$, all'involuzione $\mathcal{E} \ni E \longmapsto \overline{E} \in \mathcal{E}$ si può associare l'involuzione che associa a $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ l'unico elemento E^c di $\mathcal{P}(\Omega)$ tale che $E \cap E^c = \varnothing$ e $E \cup E^c = \Omega$.

Nel seguito considereremo quindi questa rappresentazione. Pertanto, se E e F sono due sottoinsiemi di Ω scriveremo $E \backslash F := E \cap F^c$, da cui l'identità $F^c = \Omega \backslash F$; $E \subset F$ se $E \subseteq F$, ma $F \backslash E = F \cap E^c \neq \varnothing$, e $E \triangle F := (E \backslash F) \cup (F \backslash E) = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$. Inoltre, la funzione assegnata su $\mathcal{P}(\Omega)$ tale che $\mathcal{P}(\Omega) \ni E \longmapsto \mathbb{P}(E) := P(E) \in [0,1]$ è detta *distribuzione di probabilità* e la coppia $(\Omega, \mathbb{P})$ sarà detta spazio di probabilità.

Definizione 11 *Una collezione di eventi* $\mathcal{B} := \{A_1, .., A_n\} \subset \mathcal{P}(\Omega), n \geq 2$ *è detta* partizione *di* Ω *se*

- *gli elementi della partizione sono tra loro incompatibili, ovvero* $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i, j = 1, .., n, i \neq j$;
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Notiamo che ogni evento $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ genera una partizione di Ω poiché per definizione di evento complementare, $\Omega = E \cup E^c$.

Definizione 12 *Dato uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathbb{P})$, *un evento* $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ *è detto* evento elementare *se* $\mathbb{P}(E) > 0$, *ma ogni altro evento* $F \subset E$ *è tale che* $\mathbb{P}(F) = 0$, *cioè se non esiste nessun altro evento che lo implichi che non sia l'evento impossibile.*

Dalla definizione precedente è chiaro che gli eventi elementari sono tra loro disgiunti perché se E e F fossero eventi elementari e $F \cap E \neq \varnothing$ allora si avrebbe che $F \cap E \subset E$ e $F \cap E \subset F$ contro l'ipotesi che E e F siano eventi elementari. Perciò esiste sempre una partizione di Ω che è quella i cui elementi sono gli eventi elementari di Ω.

3.1 Eventi equiprobabili

Consideriamo il caso in cui Ω sia proprio una collezione di eventi elementari, cioè $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i, n \geq 2$.

In certi casi è ragionevole pensare che ciasuno degli E_i abbia la stessa probabilità di accadere; per esempio per ragioni di simmetria del problema. Se infatti consideriamo il lancio di una moneta, presumendo che la densità del metallo che la costituisce sia omogenea, è ragionevole supporre che la probabilità dell'esito del lancio dipenda dalla superficie della moneta che tocca terra dopo il lancio. Poiché entrambe le facce hanno la stessa area è ragionevole supporre che la probabilità che l'esito del lancio mostri una faccia debba uguagliare la probabilità che l'esito del lancio mostri quella opposta. Lo stesso ragionamento si può applicare per esempio al lancio di un dado a 6 facce, sotto l'ipotesi che il materiale di cui è composto sia omogeneo percui il baricentro del dado coincida con il centro del cubo che ne rappresenta la forma.

Allora ponendo $p := \mathbb{P}(E_i), i = 1,..,n$, poiché $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) = np$, si ottiene che $p = \frac{1}{n}$. Pertanto, poiché ogni evento $E \subset \Omega$ si può scrivere come unione di eventi elementari, ovvero $E = \bigcup_{j \in \mathcal{A}} E_j, \mathcal{A} \subset \{1,..,n\}$, indicando con $|A|$ la cardinalità di un insieme A, si ha che

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{j \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(E_j) = \frac{|\mathcal{A}|}{n} = \frac{|\mathcal{A}|}{|\Omega|} ,$$

ovvero che la probabilità di un evento è data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli e quello dei casi possibili.

Esempio 13 *(Campionamento con reimbussolamento ordinato) Consideriamo un urna contenete n palline numerate. Ad ogni estrazione si estrae una sola pallina, se ne annota il numero corrispondente, e la si ricolloca nell'urna. Sia Ω l'insieme di tutte le stringhe di numeri da 1 a n che è possibile ottenere dopo M estrazioni. Più rigorosamente,*

$$\begin{aligned} \Omega \quad : &= \{1,..,n\}^{\{1,..,M\}} \\ &= \{\omega := (a_1,..,a_M) : \forall i = 1,..,M,\ a_i \in \{1,..,n\}\} \ . \end{aligned}$$

Allora, poiché ogni pallina estratta può recare una qualsiasi tra le n etichette numerate, si ha che

$$|\Omega| = \underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{M\ volte} = n^M \ .$$

Notiamo che se si volesse calcolare il numero di modi possibili in cui si possono disporre M oggetti distinti (per esempio M palline numerate da 1 a M) in n scatole numerate da 1 a n in modo che ciascuna scatola possa contenere qualunque numero di oggetti, si otterrebbe lo stesso risultato.

Esempio 14 *(Campionamento senza reimbussolamento ordinato) Consideriamo un urna contenete n palline numerate. Ad ogni estrazione si estrae una sola pallina, se ne annota il numero corrispondente, ma* ***non*** *la si ricolloca nell'urna. Sia Ω l'insieme di tutte le stringhe di numeri da 1 a n che è possibile ottenere dopo M estrazioni con $M \leq n$. Più rigorosamente,*

$$\Omega := \left\{\omega := (a_1,..,a_M) \in \{1,..,n\}^{\{1,..,M\}} : a_i \neq a_j \ se\ i \neq j\right\} \ .$$

Allora, poiché la prima pallina estratta può recare qualsiasi numero da 1 a n, la seconda invece qualsiasi numero tra quelli rimasti, che in totale sono $n-1$, la terza qualsiasi numero tra gli $n-2$ che non sono ancora stati estratti, e così via, otteniamo che

$$|\Omega| = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-M+1) \ .$$

Notiamo che se si volesse calcolare il numero di modi possibili in cui si possono disporre M oggetti distinti (per esempio M palline numerate da 1 a M) in n scatole numerate da 1 a n in modo che ogni scatola possa accogliere un solo oggetto, si otterrebbe lo stesso risultato.

Esempio 15 *(Campionamento senza reimbussolamento non ordinato) (Campionamento senza reimbussolamento ordinato) Consideriamo un urna contenete n palline numerate. Ad ogni estrazione si estrae una sola pallina, se ne annota il numero corrispondente, ma* ***non*** *la si ricolloca nell'urna. Sia Ω l'insieme di tutte le* ***collezioni di*** *stringhe di numeri da 1 a n che è possibile ottenere dopo M estrazioni con $M \leq n$ che contengono gli stessi numeri. Più rigorosamente,*

$$\Omega := \{\omega := [a_1, .., a_M] : a_i \neq a_j \text{ se } i \neq j, \ i, j = 1, .., M\} \ ,$$

dove $[a_1, .., a_M]$ è la collezione di tutte le stringhe $(b_1, .., b_M) \in \{1, .., n\}^{\{1,..,M\}}$ che si ottengono permutando gli elementi di $(a_1, .., a_M)$. Allora, bisognerebbe dividere il valore di tutti i casi possibili calcolato al punto precedente per il numero di tutti gli elementi di $[a_1, .., a_M]$, ma $|[a_1, .., a_M]| = M!$, quindi

$$|\Omega| = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n - M + 1)}{M!} = \binom{n}{M} \ .$$

Notiamo che se si volesse calcolare il numero di modi possibili in cui si possono disporre M oggetti indistinguibili (per esempio M palline identiche) in n scatole numerate da 1 a n in modo che ogni scatola possa accogliere un solo oggetto, si otterrebbe lo stesso risultato.

Esempio 16 *(Campionamento con reimbussolamento non ordinato) Consideriamo un urna contenete n palline numerate. Ad ogni estrazione si estrae una sola pallina, se ne annota il numero corrispondente, e la si ricolloca nell'urna. Sia Ω l'insieme di tutte le* ***collezioni di*** *stringhe di numeri da 1 a n che è possibile ottenere dopo M estrazioni che contengono gli stessi numeri. Più rigorosamente,*

$$\Omega := \{\omega := [a_1, .., a_M] : a_i = 1, .., n, \ \forall i = 1, .., M\} \ ,$$

dove $[a_1, .., a_M]$ è la collezione di tutte le stringhe $(b_1, .., b_M) \in \{1, .., n\}^{\{1,..,M\}}$ che si ottengono permutando gli elementi di $(a_1, .., a_M)$.

Per calcolare $|\Omega|$ è più semplice considerare l'analogo problema di calcolare il numero di modi possibili in cui si possono disporre M oggetti indistinguibili (per esempio M palline identiche) in n scatole numerate da 1 a n in modo che ciascuna scatola possa contenere qualunque numero di oggetti. Poiché ogni configurazione di oggetti indistinguibili posizionati nelle scatole si può generare etichettando gli M oggetti da 1 a M ed etichettando da 1 a $n-1$ i setti che dividono le n scatole, permutando tra loro *gli $M+n-1$ elementi dell'insieme oggetti e setti tra le scatole resi distinguibili dalle etichette numerate e dividendo questo numero per il numero delle permutazioni delle etichette degli oggetti e delle etichette dei setti, ovvero*

$$|\Omega| = \frac{(M+n-1)!}{M!\,(n-1)!} = \binom{M+n-1}{M} = \binom{M+n-1}{n-1} .$$

4 Correlazione tra coppie d'eventi

Definizione 17 *Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ e un evento $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, tale che $\mathbb{P}(B) > 0$, la misura di probabilità su $\mathbb{P}(\Omega)$*

$$\mathcal{P}(\Omega) \ni A \longmapsto \mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \in [0,1]$$

è detta probabilità condizionata *rispetto all'evento B.*

Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Dati due eventi A e B, l'evento A si dice essere *positivamente correlato* a B rispetto a $\mathbb{P}$, se

$$\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A) \ .$$

Analogamente, A si dice essere *negativamente correlato* a B rispetto a $\mathbb{P}$, se

$$\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A) \ .$$

Nel caso si abbia

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \ ,$$

si dice che A e B sono *stocasticamente indipendenti* o *non correlati* rispetto a $\mathbb{P}$. Pertanto, se $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ non sono nulle, quanto appena esposto può riassumersi nella seguente

Definizione 18 *Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ ed A, B due eventi tali che $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B) > 0$, allora A e B si dicono*

- *positivamente correlati se $\mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$;*
- *negativamente correlati se $\mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$;*
- *non correlati o indipendenti se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.*

Osserviamo che se A è positivamente correlato a B, $A^c = \Omega\backslash A$ è negativamente correlato a B e viceversa, in quanto

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((A \cup A^c) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A^c \cap B))}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A^c|B) \ , \end{aligned}$$

il che implica

$$\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B) > \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) \ .$$

Quindi, $\mathbb{P}(A^c|B) < \mathbb{P}(A^c)$. Chiaramente, se A è indipendente da B lo è anche A^c.

Esempio 19 *Considerando un urna contenente N palline di cui H bianche, si effettuano due estrazioni. Indicando con E_1 ed E_2 gli eventi in cui sia stata estratta una pallina bianca rispettivamente alla prima ed alla seconda estrazione, nel caso di estrazioni*

con reimbussolamento: *la composizione dell'urna alla seconda estrazione è identica a quella che si aveva in occasione della prima estrazione. Pertanto,*

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = \frac{H}{N} \ .$$

Inoltre, $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \left(\frac{H}{N}\right)^2 = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$, cioè le estrazioni risultano indipendenti;

senza reimbussolamento: *la composizione dell'urna alla seconda estrazione risulta variata rispetto all'estrazione precedente. Pertanto,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1) &= \frac{H}{N} \\ \mathbb{P}(E_2) &= \mathbb{P}(E_2|E_1)\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2|E_1^c)\mathbb{P}(E_1^c) \\ &= \frac{H-1}{N-1}\frac{H}{N} + \frac{H}{N-1}\frac{N-H}{N} = \frac{H}{N} \ , \end{aligned}$$

ma, essendo $H < N$, $\mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{H-1}{N-1} < \frac{H}{N} = \mathbb{P}(E_2)$. Inoltre, siccome $\mathbb{P}(E_1|E_2) = \mathbb{P}(E_2|E_1)\frac{\mathbb{P}(E_1)}{\mathbb{P}(E_2)} = \mathbb{P}(E_2|E_1)$, si ha $\mathbb{P}(E_1|E_2) < \mathbb{P}(E_1)$.

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ e un evento $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, se è $\mathcal{B} := \{A_i\}_{i=1}^n$ è una partizione di Ω, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E \cap \Omega) = \mathbb{P}\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap E)\right) \qquad (2) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E|A_i)\mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$

cioè la cosiddetta *formula delle probabilità totali.*

Esempio 20 *Considerando un urna contenente N palline tra bianche e nere, la cui composizione sia incognita, sia H il numero di palline bianche nell'urna e $\mathcal{B}$ la partizione di Ω associata agli eventi $A_i := \{H = i\}$, $i = 0,..,N$, corrispondenti cioè ai possibili valori assunti da H. Indicando con E_1 ed E_2 gli eventi in cui sia stata estratta una pallina bianca rispettivamente alla prima ed alla seconda estrazione, dall'esempio precedente segue che, nel caso di estrazione con reinbussolamento, $\forall i = 0,..,N$, subordinatamente all'evento A_i, E_1ed E_2 sono indipendenti ovvero, $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2|A_i) = \mathbb{P}(E_1|A_i)\,\mathbb{P}(E_2|A_i)$. Tuttavia,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_j) &= \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(E_j|A_i)\,\mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{N}\mathbb{P}(A_i), \quad j = 1,2 \ , \\
\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) &= \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(E_1 \cap E_2|A_i)\,\mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(E_1|A_i)\,\mathbb{P}(E_2|A_i)\,\mathbb{P}(A_i) \\
&= \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{i}{N}\right)^2 \mathbb{P}(A_i) \ .
\end{aligned}$$

Nel caso in cui H sia uniformemente distribuita, $\mathbb{P}(H = i) = \frac{1}{|\{0,..,N\}|} = \frac{1}{N+1}$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1) &= \mathbb{P}(E_2) = \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{N}\frac{1}{N+1} = \frac{1}{2} \ , \\
\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) &= \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{i}{N}\right)^2 \frac{1}{N+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6N} > \frac{1}{4} = \mathbb{P}(E_1)\,\mathbb{P}(E_2) \ .
\end{aligned}$$

Quindi, E_1 e E_2 sono positivamente correlati rispetto a $\mathbb{P}$.