Introduzione alla teoria dei Grafi Aleatori ed alla Percolazione

Michele Gianfelice
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Torino

a.a. 2005/2006

Indice

Capitolo 1

Introduzione

I grafi aleatori furono introdotti all'inizio degli anni '50 da Paul Erdős per studiare l'esistenza di grafi con caratteristiche specifiche. L'idea è quella di associare ad una collezione sufficientemente grande di grafi uno spazio di probabilità $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ e quindi rappresentare una data proprietà dei grafi come variabile aleatoria definita su questo spazio. Assumendo che, allorché il parametro n cresce, la collezione dei grafi s'ingrandisce, la proprietà in studio, tramite tale rappresentazione, definisce al variare di n una successione di variabili aleatorie il cui limite è l'oggetto d'interesse di detta costruzione.

Più recenti, ovvero datati verso la fine degli anni '50, sono i processi di percolazione che furono introdotti da Broadent e Hammersley al fine di modellizzare il passaggio di un fluido in un mezzo poroso. Se si modellizza un mezzo poroso come un retiticolo di canali di cui una frazione q sono ostruiti, si ha che la collezione dei canali non ostruiti (liberi) può considerarsi come l'insieme degli archi di un grafo i cui vertici sono gli snodi dei canali. Nel caso della percolazione di Bernoulli si considera che ogni canale, indipendentemente dagli altri, sia ostruito con probabilità q. Quindi, lo spazio di probabilità che si prende in considerazione è $\left(\{0,1\}^E, \mathcal{B}\left(\{0,1\}^E\right), \mathbb{P}_p\right)$ dove: E è la collezione dei canali, che è un insieme al più numerabile, $\mathcal{B}\left(\{0,1\}^E\right)$ è la σalgebra generata dai sottoinsiemi cilindrici di base finita di $\{0,1\}^E$ e $\mathbb{P}_p = \bigotimes_{e \in E} \mu_e$, con μ_e misura di Bernoulli di parametro $p = 1 - q$. Ad ogni elemento di $\{0,1\}^E$ corrisponde allora una configurazione di canali liberi e quindi un grafo aleatorio.

Parte I

Grafi aleatori

Per la terminologia e la simbologia adottate in questa sezione, laddove non espressamente specificato, si rimanda all'appendice.

Capitolo 2

Il Grafo aleatorio di Erdős-Rényi

Dato $n \in \mathbb{N}^+$, consideriamo il sottoinieme di $\mathbb{N}$, $V_n := \{1, .., n\}$ e sia $E_n := \mathcal{P}_2(V_n)$. Se $K_n = K(V_n)$ è il grafo completo di insieme di vertici V_n, indichiamo con $\mathbb{G}_n$ la collezione dei sottografi spanning di K_n, ovvero $\forall G \in \mathbb{G}_n$, $\exists E(G) \subseteq E_n$ tale che $G = (V_n, E(G))$. Notiamo che $\mathbb{G}_n$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{P}(E_n)$

$$\mathcal{P}(E_n) \ni E \longmapsto (V_n, E) = G \in \mathbb{G}_n \tag{2.1}$$

$$\mathbb{G}_n \ni G = (V_n, E(G)) \longmapsto E(G) \in \mathcal{P}(E_n) \tag{2.2}$$

e che $|\mathcal{P}(E_n)| = 2^{|E_n|}$, $|E_n| = \binom{n}{2}$.

Associamo ora ad ogni elemento di E_n una variabile suscettibile di assumere solo due valori:

$$E_n \ni e \longmapsto \omega(e) \in \{0, 1\}, \tag{2.3}$$

resta quindi definito $\Omega := \{0, 1\}^{E_n}$. Posto $\forall \omega \in \Omega_n$, $E(\omega) := \{e \in E_n : \omega(e) = 1\}$ si ottiene una corrispondenza biunivoca tra Ω_n e $\mathcal{P}(E_\mathbb{N})$ e quindi una corrispondenza biunivoca tra Ω_n e $\mathbb{G}_n$, ovvero

$$\Omega_n \ni \omega \longmapsto G(\omega) = (V_n, E(\omega)) \in \mathbb{G}_n, \tag{2.4}$$

$$\mathbb{G}_n \ni G \longmapsto \omega(G) \in \Omega_n. \tag{2.5}$$

con $\omega(G)$ vettore in Ω_n di componenti $\omega(e) = \mathbf{1}_{E(G)}(e)$.

2.1 Il modello $\mathbb{G}(n, p)$

Se $\mathcal{F}_n := \mathcal{P}(\Omega_n)$, definiamo su $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ una famiglia di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite (v.a.i.i.d.) $\{\eta_e\}_{e \in E_n}$

$$\Omega_n \ni \omega \longmapsto \eta_e(\omega) = \theta \in \{0, 1\}. \tag{2.6}$$

Allora, poiché per definizione $\{\eta_e\}_{e\in E_n}$ è una famiglia di v.a. distribuite secondo la legge di Bernoulli, sia $p \in (0,1)$, tale che $\mu_p(\theta) := p\mathbf{1}_{\{1\}}(\theta) + (1-p)\mathbf{1}_{\{0\}}(\theta)$. Quindi, il vettore aleatorio $\eta = (\eta_e,\, e \in E_n)$ è anch'esso un elemento di Ω_n ed ha distribuzione di probabilità

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega_n : \eta(\omega) = \bar{\omega}\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega_n : \eta_e(\omega) = \bar{\omega}(e)\,,\, e \in E_n\} = \prod_{e\in E_n} \mu_p(\bar{\omega}(e))\,, \quad \bar{\omega} \in \Omega_n. \tag{2.7}$$

Ovvero, se $\mathbb{P}_{p,e} := \mu_p \circ \eta_e$ è la distribuzione di probabilità indotta da η_e su $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, la distribuzione di probabilità su $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ definita tramite il vettore aleatorio η, risulta $\mathbb{P} := \pi_p \circ \eta = \bigotimes_{e\in E_n} \mathbb{P}_{p,e}$.

Consideriamo allora lo spazio di probabilità $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$. Per la corrispondenza biunivoca tra Ω_n e $\mathbb{G}_n$ resta allora definito lo spazio di probabilità $\left(\mathbb{G}_n, \mathcal{P}(\mathbb{G}_n), \bar{\mathbb{P}}\right)$, dove se γ è la mappa $\Omega_n \ni \omega \longmapsto \gamma(\omega) = G \in \mathbb{G}_n$, $\bar{\mathbb{P}} := \mathbb{P} \circ \gamma^{-1}$.

Considerare il modello $\mathbb{G}(n,p)$ significa considerare lo spazio di probabilità $\left(\mathbb{G}_n, \mathcal{P}(\mathbb{G}_n), \bar{\mathbb{P}}\right)$.

2.2 Il modello $\mathbb{G}(n,M)$

Sia $\mathbb{G}_{n,M} := \{G \in \mathbb{G}_n : |E(G)| = M\}$. Considerando l'attesa condizionata di $\mathbb{P}$ rispetto a $\mathbb{G}_{n,M}$ da $\mathbb{G}(n,p)$ si ottiene una distribuzione di probabilità uniforme su $(\mathbb{G}_{n,M}, \mathcal{P}(\mathbb{G}_{n,M}))$.

Considerare il modello $\mathbb{G}(n,M)$ significa considerare lo spazio di probabilità $\left(\mathbb{G}_{n,M}, \mathcal{P}(\mathbb{G}_{n,M}), \tilde{\mathbb{P}}\right)$, dove $\tilde{\mathbb{P}}$ è la distribuzione di probabilità uniforme.

Osservazione 1 *Nel seguito ci restringeremo al caso del modello $\mathbb{G}(n,p)$ e per semplificare la notazione, useremo $\mathbb{P}$ al posto di $\bar{\mathbb{P}}$ e $\mathbb{P}_n(A)$ o $\mathbb{P}_p(A)$ per indicare la probabilità di un generico evento $A \in \mathcal{P}(\mathbb{G}_n)$, ovvero per sottolineare la dipendenza di $\mathbb{P}$ dai paramentri n o p. Inoltre, talvolta sarà conveniente indicare con G_p il generico atomo di $(\mathbb{G}_n, \mathcal{P}(\mathbb{G}_n), \mathbb{P})$ e scrivere per esempio $\mathbb{P}(G_p \in A)$ invece di $\mathbb{P}_p(A)$. Per una giustificazione di questo fatto si veda il Lemma 4. Analoga notazione verrà usata per i valori attesi di v.a. rispetto a $\mathbb{P}$ o per altre quantità che di questi sono funzioni.*

2.3 Analisi delle configurazioni di un grafo aleatorio

$\forall H \in \mathbb{G}_n$, siano $v_H := |V(H)|$, $e_H := |E(H)|$ e $\mathbf{1}_H := \mathbf{1}_{\{G\in\mathbb{G}_n : G\supseteq H\}}$. Ricordando che $\forall H, H' \in \mathbb{G}_n$, $H \sim H'$ indica che H e H' sono isomorfi, siano inoltre $\mathcal{G}_n := \mathbb{G}_n/\sim$ e $\mathbb{G}_n(H)$ la classe d'equivalenza di $H \in \mathbb{G}_n$.

Definizione 2 $\forall n \geq 2$, *sia $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{G}_n)$ un insieme misurabile. $\mathcal{Q}$ è chiuso per isomorfismi se $\forall G \in \mathcal{Q}$ anche $\mathbb{G}_n(G) \in \mathcal{Q}$. In quest'ultimo caso $\mathcal{Q}$ è detto* proprietà *di $\mathbb{G}_n$.*

Una proprietà $\mathcal{Q}$ è detta crescente *se $G \supseteq H$, $H \in \mathcal{Q} \Longrightarrow G \in \mathcal{Q}$.*

Una proprietà $\mathcal{Q}$ è detta convessa *se* $H \subseteq G \subseteq F$, $H, F \in \mathcal{Q} \Longrightarrow G \in \mathcal{Q}$.

Osservazione 3 *Notiamo che se $\mathcal{Q}$ è una proprietà, anche $\mathcal{Q}^c$ lo è. Pertanto diremo che $\mathcal{Q}$ è* decrescente *se $\mathcal{Q}^c$ è crescente, quindi che $\mathcal{Q}$ è* monotona *se è crescente o decrescente.*

Esempi di proprietà crescenti sono la collezione in $\mathbb{G}_n$ dei grafi connessi o di quelli che contengono un dato grafo.

Lemma 4 *Sia $\mathcal{Q}$ una proprietà crescente e $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$. Allora,*

$$\mathbb{P}_{p_1}(\mathcal{Q}) \leq \mathbb{P}_{p_2}(\mathcal{Q}) \tag{2.8}$$

Dimostrazione: Notiamo che lo spazio di probabilità $(\mathbb{G}_n, \mathcal{P}(\mathbb{G}_n), \mathbb{P}_{p_2})$ può essere realizzato nel modo seguente: dati gli spazi di probabilità $(\mathbb{G}_n, \mathcal{P}(\mathbb{G}_n), \mathbb{P}_{p_0}), (\mathbb{G}_n, \mathcal{P}(\mathbb{G}_n), \mathbb{P}_{p_1})$, consideriamo le applicazioni misurabili

$$\mathbb{G}_n \times \mathbb{G}_n \ni (G, G') \longmapsto \pi_0(G, G') = G \in \mathbb{G}_n \tag{2.9}$$

$$\mathbb{G}_n \times \mathbb{G}_n \ni (G, G') \longmapsto \pi_1(G, G') = G' \in \mathbb{G}_n \tag{2.10}$$

Allora, se

$$\mathbb{G}_n \times \mathbb{G}_n \ni (G, G') \longmapsto \pi(G, G') := \pi_0(G, G') \cap \pi_1(G, G') \in \mathbb{G}_n\,, \tag{2.11}$$

scegliendo $p_0 = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$, si ha

$$\mathbb{P}_{p_2}(G) = (\mathbb{P}_{p_0} \otimes \mathbb{P}_{p_1}) \circ \pi^{-1}(G) = \mathbb{P}_{p_0}(G) + \mathbb{P}_{p_1}(G) - \mathbb{P}_{p_0}(G)\,\mathbb{P}_{p_1}(G)\;. \tag{2.12}$$

Poiché $p_2 \geq p_0 \geq p_1$, $\exists G_0, G_2 \in \mathbb{G}_n : \mathbb{P}_{p_0}(G) = \mathbb{P}_{p_1}(G_0)\,,\ \mathbb{P}_{p_2}(G) = \mathbb{P}_{p_1}(G_2)\,,$ quindi

$$\mathbb{P}_{p_1}(G_2) = \mathbb{P}_{p_1}(G_0) + \mathbb{P}_{p_1}(G) - \mathbb{P}_{p_1}(G_0)\,\mathbb{P}_{p_1}(G)\;, \tag{2.13}$$

cioè $G_2 = G_0 \cup G$. Conviene dunque riscrivere la precedente relazione nel modo seguente

$$\mathbb{P}(G_{p_2}) = \mathbb{P}(G_{p_0}) + \mathbb{P}(G_{p_1}) - \mathbb{P}(G_{p_0})\,\mathbb{P}(G_{p_1})\;, \tag{2.14}$$

ridefinendo $G = G_1$ e per $i = 0, 1, 2$, $G_i = G_{p_i}$, per cui $\mathbb{P}_{p_i}(G) = \mathbb{P}(G_{p_i})$. Dunque $\forall G_{p_1}$, $\exists G_{p_2}$: $G_{p_1} \subseteq G_{p_2}$ e siccome $\mathcal{Q}$ è crescente, se $G_{p_1} \in \mathcal{Q}$ allora $G_{p_2} \in \mathcal{Q}$, da cui segue la tesi. ■

Esercizio 5 *Dimostrare la (2.12).*

Definizione 6 *Una successione $\{\bar{p}_n\}_{n \geq 2}$ è detta* soglia *per una proprietà monotona $\mathcal{Q}$ se:*

$$\mathbb{P}(G_p \in \mathcal{Q}) = \mathbb{P}_n(\mathcal{Q}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & se \quad p_n << \bar{p}_n \\ 1 & se \quad p_n >> \bar{p}_n \end{cases}\;. \tag{2.15}$$

Osservazione 7 *Segue dalla definizione precedente che se $\hat{p}_n \asymp \bar{p}_n$ e $\bar{p}_n$ è una soglia per la proprietà monotona $\mathcal{Q}$, allora anche $\hat{p}_n$ è una soglia per $\mathcal{Q}$.*

Data una proprietà monotona $\mathcal{Q}$ e $a \in (0,1)$, sia $p(a) \in (0,1)$ tale che

$$\mathbb{P}_{p(a)}(\mathcal{Q}) = a \tag{2.16}$$

Proposizione 8 *Sia $\mathcal{Q}$ una proprietà crescente. $\bar{p}_n$ è una soglia per $\mathcal{Q}$ $\Longleftrightarrow$ $\forall a \in (0,1)$, $p_n(a) \asymp \bar{p}_n$.*

Dimostrazione:

$\Longrightarrow$ Se $p_n(a)$ non è asintoticamente equivalente a $\bar{p}_n$, esiste una sottosuccessione $\{n'\} \subset \{n\}$ tale che

$$\frac{p_{n'}(a)}{\bar{p}_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right. . \tag{2.17}$$

Allora,

- se $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n'}(a)}{\bar{p}_n} = 0$ poiché $\bar{p}_n$ è una soglia $\lim_{n'\to\infty} \mathbb{P}_{p_{n'}(a)}(\mathcal{Q}) = 0$ contro l'ipotesi che $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{p_n(a)}(\mathcal{Q}) = a$.
- Se invece $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n'}(a)}{\bar{p}_n} = 0$ ne segue che $\lim_{n'\to\infty} \mathbb{P}_{p_{n'}(a)}(\mathcal{Q}) = 1$ contro l'ipotesi che $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{p_n(a)}(\mathcal{Q}) = a$.

$\Longleftarrow$ Se $\bar{p}_n$ non è una soglia, esiste una successione $\{p_n\}$ tale che o $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\bar{p}_n} = 0$ e $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}_{p_n}(\mathcal{Q}) > 0$, oppure $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\bar{p}_n} = \infty$ e $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}_{p_n}(\mathcal{Q}) < 1$. Nel primo caso, esiste $\varepsilon \in (0,1)$ ed una sottosuccessione $\{n'\} \subset \{n\}$ tale che $\mathbb{P}_{p_{n'}}(\mathcal{Q}) > \varepsilon$ il che, per il lemma precedente, implica $p_n(\varepsilon) \leq p_n << \bar{p}_n$. Nel secondo caso, esiste $\varepsilon \in (0,1)$ ed una sottosuccessione $\{n'\} \subset \{n\}$ tale che $\mathbb{P}_{p_{n'}}(\mathcal{Q}) < \varepsilon$ il che implica $\bar{p}_n << p_n \leq p_n(\varepsilon)$. In entrabi i casi esiste $\varepsilon \in (0,1)$ tale che $\bar{p}_n$ non è asintoticamente equivalente a $p_n(\varepsilon)$ contro l'ipotesi che $\bar{p}_n \asymp p_n(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon \in (0,1)$.

■

Teorema 9 *Ogni proprietà monotona ammette una soglia.*

Dimostrazione: Senza perdita di generalità si può assumere $\mathcal{Q}$ crescente. Sia allora $\forall \varepsilon \in (0,1)$, $p(\varepsilon) \in (0,1) : \mathbb{P}_{p(\varepsilon)}(\mathcal{Q}) = \varepsilon$ e $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+ : (1-\varepsilon)^m \leq \varepsilon$. Sia $G_{(m)} \in \mathbb{G}_n$ unione di $m \geq m(\varepsilon)$ copie indipendenti (separate) $G^{(i)}$, $i = 1, .., m$ di un generico grafo G. Allora,

$$\mathbb{P}_{p(\varepsilon)}\left(G_{(m)}\right) = p'(\varepsilon) = 1 - (1 - p(\varepsilon))^m \leq mp(\varepsilon) \tag{2.18}$$

e per il Lemma (4)

$$\mathbb{P}\left(G_{p'(\varepsilon)} \in \mathcal{Q}\right) \leq \mathbb{P}\left(G_{mp(\varepsilon)} \in \mathcal{Q}\right) . \tag{2.19}$$

Inoltre, siccome $\mathcal{Q}$ è crescente se $\forall i = 1, .., m$, $G^{(i)} \in \mathcal{Q}$, allora anche $\bigcup_{i=1}^{m} G^{(i)} \in \mathcal{Q}$, perciò

$$\mathbb{P}_{p(\varepsilon)} \left(\bigcup_{i=1}^{m} G^{(i)} \notin \mathcal{Q} \right) \leq \mathbb{P}_{p(\varepsilon)} \left(G^{(i)} \notin \mathcal{Q}, \forall i = 1, .., m \right) \tag{2.20}$$
$$= \left(1 - \mathbb{P}_{p(\varepsilon)} \left(G \in \mathcal{Q}\right)\right)^m = (1 - \varepsilon)^m \leq \varepsilon \, ,$$

che unitamente alla (2.19) implica

$$\mathbb{P}_{mp(\varepsilon)} \left(\mathcal{Q}\right) \geq \mathbb{P}_{p(\varepsilon)} \left(\bigcup_{i=1}^{m} G^{(i)} \in \mathcal{Q} \right) \geq 1 - \varepsilon = \mathbb{P}_{p(1-\varepsilon)} \left(\mathcal{Q}\right) \, . \tag{2.21}$$

Pertanto, $\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right), m \geq m\left(\varepsilon\right)$

$$p\left(\varepsilon\right) \leq p\left(\frac{1}{2}\right) \leq p\left(1-\varepsilon\right) \leq mp\left(\varepsilon\right) \tag{2.22}$$

Poiché questa relazione non cambia se si sostituisce a p il generico temine di una successione $\{p_n\}_{n\geq 2}$, ma soprattutto $m\left(\varepsilon\right)$ non dipende da n, si ha

$$p_n\left(\varepsilon\right) \asymp p_n\left(\frac{1}{2}\right) \asymp p_n\left(1-\varepsilon\right) \tag{2.23}$$

da cui, per la proposizione precente segue che $\{p_n\left(\frac{1}{2}\right)\}_{n\geq 2}$ è una soglia per $\mathcal{Q}$. ■

Definizione 10 *Sia $\bar{p}_n$ una soglia per una proprietà monotona $\mathcal{Q}$. $\bar{p}_n$ è detta essere* fine *se $\forall \varepsilon \in (0,1)$*

$$\mathbb{P}_{p_n}\left(\mathcal{Q}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & se\, p_n \leq \left(1-\varepsilon\right)\bar{p}_n \\ 1 & se\, p_n \geq \left(1+\varepsilon\right)\bar{p}_n \end{cases} . \tag{2.24}$$

Infatti, se $\forall \varepsilon \in (0,1)$ definiamo

$$\delta\left(\varepsilon\right) := p\left(1-\varepsilon\right) - p\left(\varepsilon\right) \geq 0 \tag{2.25}$$

dal teorema precedente segue che $m\left(\varepsilon\right) \leq \frac{\log\varepsilon}{\log(1-\varepsilon)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}$, percui $\forall m \geq m\left(\varepsilon\right), \, p\left(1-\varepsilon\right) \leq mp\left(\varepsilon\right)$ e

$$1 \leq \frac{p\left(1-\varepsilon\right)}{p\left(\varepsilon\right)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.26}$$

Ma,

$$\frac{p\left(1-\varepsilon\right)}{p\left(\varepsilon\right)} = \frac{\frac{p(1-\varepsilon)}{p\left(\frac{1}{2}\right)}}{\frac{p(\varepsilon)}{p\left(\frac{1}{2}\right)}} \, , \tag{2.27}$$

perciò, nel caso che p_n sia una soglia fine, si ha che $\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \, \frac{p_n(\varepsilon)}{p_n\left(\frac{1}{2}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ e

$$\delta_n\left(\varepsilon\right) = p_n\left(1-\varepsilon\right) - p_n\left(\varepsilon\right) = o\left(p_n\right). \tag{2.28}$$

2.3.1 Valori di soglia per l'occorrenza di un grafo di taglia fissata

$\forall H \in \mathbb{G}_n$, indichiamo con $X_H := \sum_{H' \in \mathbb{G}_n(H)} \mathbf{1}_{H'} = \sum_{H' \subseteq K_n : H' \sim H} \mathbf{1}_{H'}$. Allora, poiché

$$|\mathbb{G}_n(H)| = \binom{n}{v_H} \frac{v_H!}{|aut(H)|}, \tag{2.29}$$

con $aut(H)$ l'insieme degli automorfismi di H, si ha

$$\mathbb{E}_n(X_H) = \binom{n}{v_H} \frac{v_H!}{|aut(H)|} p_n^{e_H} \asymp n^{v_H} p_n^{e_H} . \tag{2.30}$$

Per la disuguaglianza di Markov $\mathbb{P}_n(X_H > 0) \leq \mathbb{E}_n(X_H)$, ma

$$\mathbb{E}_n(X_H) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & se\, p_n << n^{-\frac{v_H}{e_H}} \\ \infty & se\, p_n >> n^{-\frac{v_H}{e_H}} \end{cases} . \tag{2.31}$$

Osservazione 11 *Nel caso in cui* $p_n >> n^{-\frac{v_H}{e_H}}$, *dalla (2.31) non si può inferire che* $\mathbb{P}_n(X_H > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. *Infatti, considerando i grafi*

$$\begin{array}{ccccccccc} & H & & & & & F & & \\ \cdot & - & \cdot & \quad & \cdot & - & \cdot & & \\ | & \backslash & | & & | & \backslash & | & & \\ \cdot & - & \cdot & & \cdot & - & \cdot & - & \cdot \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} v_H = 4 & \qquad & v_F = 5 \\ e_H = 5 & & e_F = 6 \end{array}$$

se $n^{-\frac{5}{6}} << p_n << n^{-\frac{4}{5}}$, *si ha* $\mathbb{E}_n(X_F) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\mathbb{E}_n(X_H) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *anche se* $H \subset F$.

Quindi la stima del valore atteso di X_H non è sufficiente per studiare la distribuzione asintotica delle realizzazioni di un grafo random, pertanto è necessario studiarne la varianza.

Osservazione 12 $\forall G \in \mathbb{G}_n$ *sia*

$$\phi(G) := \min \{\mathbb{E}(X_H) : H \subseteq G,\, e_H > 0\} . \tag{2.32}$$

Poiché $\mathbb{E}_n(X_H) \asymp n^{v_H} p_n^{e_H}$,

$$\phi_n(G) \asymp \min_{H \subseteq G,\, e_H > 0} n^{v_H} p_n^{e_H} = \min_{H \subseteq G,\, e_H > 0} \left(n p_n^{\frac{e_H}{v_H}} \right)^{v_H} \tag{2.33}$$

Lemma 13 $\forall G \in \mathbb{G}_n$, *le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. $np_n^{m(G)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$;

2. $n^{v_H} p_n^{e_H} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\forall H \subseteq G$, $v_H > 0$;

3. $\mathbb{E}_n(X_H) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $H \subseteq G$, $v_H > 0$;

4. $\phi_n(G) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

dove $m(G)$ indica la densità massima di G (cfr. (6.8)).

Dimostrazione: Data l'affermazione 1. segue che $\forall H \subseteq G$ tale che $v_H > 0$, $np_n^{\frac{e_H}{v_H}} \uparrow \infty$, ma siccome $\mathbb{E}_n(X_H) \asymp n^{v_H} p_n^{e_H} = \left(np_n^{\frac{e_H}{v_H}}\right)^{v_H}$ allora 1. implica 2. e viceversa. Per la definizione di $\phi(G)$, 4. implica 3. e viceversa. ■

Lemma 14 *Sia $G \in \mathbb{G}_n : e_G > 0$. Allora*

$$Var_n(X_G) \asymp (1 - p_n) \frac{(\mathbb{E}_n(X_G))^2}{\phi_n(G)}. \tag{2.34}$$

In particolare, se $p_n < 1$,

$$Var_n(X_G) \asymp \frac{(\mathbb{E}_n(X_G))^2}{\phi_n(G)}. \tag{2.35}$$

Dimostrazione: $\forall G \in \mathbb{G}_n$,

$$Var(X_G) = \sum_{G', G''} cov(\mathbf{1}_{G'}, \mathbf{1}_{G''}), \tag{2.36}$$

ma $\mathbf{1}_{G'}$ e $\mathbf{1}_{G''}$ sono indipendenti se separati, ovvero se $E(G') \cap E(G'') = \emptyset$, quindi

$$\begin{aligned} Var(X_G) &= \sum_{G', G'' : E(G') \cap E(G'') \neq \emptyset} cov(\mathbf{1}_{G'}, \mathbf{1}_{G''}) \\ &= \sum_{G', G'' : E(G') \cap E(G'') \neq \emptyset} \left[\mathbb{E}(\mathbf{1}_{G'} \mathbf{1}_{G''}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{G'}) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{G''})\right]. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Sia $H \in \mathbb{G}_n$ tale che $E(H) = E(G') \cap E(G'')$. Per la (2.29),

$$|\mathbb{G}_n(H)| \asymp n^{v_H} n^{2(v_G - v_H)} = n^{2v_G - v_H}, \tag{2.38}$$

quindi

$$
\begin{aligned}
Var_n(X_G) &\asymp \sum_{H\subseteq G\,:\,e_H>0} n^{2v_G-v_H}\left(p_n^{2e_G-e_H}-p_n^{2e_G}\right) \\
&\asymp \sum_{H\subseteq G\,:\,e_H>0} n^{2v_G-v_H}p_n^{2e_G-e_H}(1-p_n) \\
&\asymp (1-p_n)\max_{H\subseteq G\,:\,e_H>0}\frac{(\mathbb{E}_n(X_G))^2}{\mathbb{E}_n(X_H)} \\
&= (1-p_n)\frac{(\mathbb{E}_n(X_G))^2}{\phi_n(G)}\,.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

■

Teorema 15 $\forall G\subseteq \mathbb{G}_n : e_G>0$

$$
\mathbb{P}_n(X_G>0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & se\, p_n << n^{-\frac{1}{m(G)}} \\ 1 & se\, p_n >> n^{-\frac{1}{m(G)}} \end{cases}\,, \tag{2.40}
$$

ovvero la successione $\{n^{-\frac{1}{m(G)}}\}_{n\geq 1}$ *è una soglia per la proprietà* $\mathcal{Q}=\{H\in\mathbb{G}_n : H\supseteq G\}$.

Dimostrazione: La prima affermazione segue dalla disuguaglianza di Markov, dato che in questo caso $\mathbb{E}_n(X_G)=o(1)$. La seconda affermazione, invece, segue dai due precedenti lemmata. Infatti, poiché $p_n >> n^{-\frac{1}{m(G)}}$, per il primo lemma, $\phi_n(G)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$. Quindi, poiché dalla disuguaglianza di Chebichev segue che

$$
\mathbb{P}(X_G=0)\leq \frac{Var(X_G)}{(\mathbb{E}(X_G))^2}\,, \tag{2.41}
$$

dal lemma precedente si ha che

$$
\frac{Var_n(X_G)}{(\mathbb{E}_n(X_G))^2}\asymp\frac{(1-p_n)}{\phi_n(G)}=o(1)\,. \tag{2.42}
$$

Pertanto $\mathbb{P}_n(X_G>0)=1-o(1)$. ■

Osservazione 16 *Dalla dimostrazione precedente segue anche che se* $\phi_n(G)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, *allora* $\frac{X_G}{\mathbb{E}_n(X_G)}$ *converge a 1 in probabilità.*

2.3.2 Forma delle configurazioni di un grafo aleatorio

Proposizione 17 *$\forall k \geq 2$ fissato, se $n^{-\frac{k}{k-1}} << p_n << n^{-\frac{k+1}{k}}$, le configurazioni tipiche di un grafo aleatorio risultano essere una collezione di alberi (*foresta*) di ordine al più k.*

Dimostrazione: Se $T_k \in \mathbb{G}_n$ è un albero di ordine k, $v_{T_k} = k$, e $e_{T_k} = k-1$. Quindi $m(T_k) = \frac{k-1}{k}$. Pertanto, per il teorema precedente,

$$\mathbb{P}_n(X_{T_l} > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & se \quad l \leq k \\ 0 & se \quad l = k+1 \end{cases} \tag{2.43}$$

da cui segue che non esistono alberi più grandi di T_k. ■

Esercizio 18 *dimostrare che la proposizione precedente vale anche se $k = k(n) << (\log n)^{\frac{1}{2}}$. Infatti per ipotesi*

$$n^{-\frac{1}{k(n)-1}} << np_n << n^{-\frac{1}{k(n)}}. \tag{2.44}$$

Proposizione 19 *Se $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, allora le configurazioni tipiche di un grafo aleatorio non contengono cicli.*

Dimostrazione: Se $C_l \in \mathbb{G}_n$ è un ciclo di lunghezza l, $v_{C_l} = l = e_{C_l}$. Allora,

$$|\mathbb{G}_n(C_l)| = \binom{n}{l}\frac{l!}{2l}. \tag{2.45}$$

Quindi,

$$\mathbb{E}_n\left(\sum_{l\geq 3} X_{C_l}\right) = \sum_{l\geq 3}\binom{n}{l}\frac{(l-1)!}{2}p_n^l \leq \sum_{l\geq 3}(np_n)^l \asymp (np_n)^3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.46}$$

e la tesi segue dalla disuguaglianza di Markov. ■

2.3.3 La componente gigante

La dimostrazione del risultato che segue si basa sulle nozioni di disuguaglianza di Chernov e di processo di diramazione esposte in appendice.

Teorema 20 *Sia $np_n = c$, con c costante positiva.*

1. *Se $c < 1$, la probabilità che il sottografo connesso di taglia massima di un grafo aleatorio contenga al più $\frac{3}{(1-c)^2}\log n$ vertici tende a 1 per $n \to \infty$.*

2. *Se $c > 1$, sia β_c soluzione dell'equazione $\beta_c + e^{-c\beta_c} = 1$. Allora, il sottografo connesso di taglia massima di un grafo aleatorio (*componente gigante*) contiene, nel limite di n che diverge, un numero di vertici proporzionale a $n\pi_c$, mentre la probablilità che il sottografo connesso di un grafo aleatorio di taglia maggiore dopo la componente gigante contenga al più $\frac{16}{(1-c)^2}\log n$ vertici tende a 1 per $n \to \infty$.*

Dimostrazione: La dimostrazione di questo risultato si basa sulla seguente costruzione che genera l'albero di massimo ordine contenuto in una componente del grafo aleatorio alla stregua dell'albero di Galton &Watson.

Più precisamente, dato un grafo aleatorio G, se $\forall v \in V_n$ indichiamo con $C_v = C_v(G)$ la componente connessa di G contenente v, la procedura che segue permette di costruire un albero T tale che $V(T) \equiv V(C_v)$.

Algoritmo 21 *Sia G una data configurazione del grafo aleatorio.*

passo 0 *Scelto un vertice $v \in V_n$, si consideri $\bar{N}(v)$.*

passo1 *Sia $W_r := \operatorname{lex} \bar{N}(v) = \{w_0, .., w_r\}$, $0 \le r \le n$ il riordinamento lessicografico di $\bar{N}(v)$ e si ponga $i := 0$.*

passo 2 *Se $i \le r$, si consideri $N(w_i) \backslash W_r$.*

- *Se $N(w_i) \backslash W_r \neq \emptyset$, si ponga $\bar{N}(v) := \bar{N}(w_i) \cup W_r$ e si torni al passo 1.*
- *Se $N(w_i) \backslash W_r = \emptyset$, si ponga $i := i + 1$ e si torni al passo 2.*

Se $i = r + 1$, si ponga $V(C_v) := W_r$ e stop.

passo 3 *Se $V_n \backslash V(C_v) \neq \emptyset$, si scelga $v' \in V_n \backslash V(C_v)$ e si torni al passo 0 sostituendo v' a v, altrimenti stop.*

$\forall i \ge 0$, $X_i := |N(w_i) \backslash W_r|$ *dipende dalla realizzazione del grafo aleatorio G, ed è dunque una v.a.. La legge secondo cui sono distribuite le X_i è binomiale di parametri $n - |W_r|, \frac{c}{n}$. Infatti, considerando la seguente procedura*

Algoritmo 22 **passo 0** *Scelto un vertice $v \in V_n$, si generi $N(v)$ secondo la legge binomiale di parametri n e $\frac{c}{n}$.*

passo1 *Sia $W_r := \operatorname{lex} \bar{N}(v) = \{w_0, .., w_r\}$, $0 \le r \le n$ il riordinamento lessicografico di $\bar{N}(v)$ e si ponga $i := 0$.*

passo 2 *Se $i \le r$, si generino degli archi tra w_i e gli elementi di $V_n \backslash W_r$ in maniera indipendente secondo la legge di Bernoulli di parametro $\frac{c}{n}$ e si consideri $N(w_i)$.*

- *Se $N(w_i) \backslash W_r \neq \emptyset$, si ponga $\bar{N}(v) := \bar{N}(w_i) \cup W_r$ e si torni al passo 1.*
- *Se $N(w_i) \backslash W_r = \emptyset$, si ponga $i := i + 1$ e si torni al passo 2.*

Se $i = r + 1$, si ponga $V(C_v) := W_r$ e stop.

passo 3 *Se $V_n \backslash V(C_v) \neq \emptyset$, si scelga $v' \in V_n \backslash V(C_v)$ e si torni al passo 0 sostituendo v' a v, altrimenti stop.*

Se $i = r + 1$, stop.

$\forall i \geq 0$, $Z_i := |N(w_i) \backslash W_r|$, come somma di $n - |W_r|$ v.a. di Bernoulli di parametro $\frac{c}{n}$, segue la legge binomiale di parametri $n - |W_r|, \frac{c}{n}$. Poiché generare una configurazione di un grafo aleatorio equivale a generare una configurazione di archi tra gli elementi di V_n in maniera indipendente secondo la legge di Bernoulli, $\forall v \in V_n$ le due procedure danno luogo ad alberi aleatori che hanno la stessa distribuzione, quindi, $\forall i \geq 0$, $X_i \overset{D}{=} Z_i$.

c<1 *Siano X_i^+, $i \geq 0$ una collezione di v.a.i.i.d. secondo la legge binomiale di parametri n e $\frac{c}{n}$. Poiché $\forall x > 0$, $\mathbb{P}(X_i > x) \leq \mathbb{P}\left(X_i^+ > x\right)$,*

$$\mathbb{P}_n\left(|V(C_v)| \geq k+1\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i^+ \geq k\right) \tag{2.47}$$

ma, $\forall i \geq 0$, $X_i^+ \overset{D}{=} \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}$, dove le Y_{ij}, $j = 1,..,n$, sono v.a.i.i.d. bernoulliane di parametro $\frac{c}{n}$. Perciò, per la disuguaglianza di Chernov e per il Lemma (37)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i^+ \geq k\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \geq k\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{nk} Y_i \geq k\right) \\ &\leq \exp\left[-nkH\left(\frac{k}{nk}|\frac{c}{n}\right)\right] \leq e^{-k\left(c-1+\log\frac{1}{c}\right)} \leq e^{-k\frac{(1-c)^2}{2}}\end{aligned} \tag{2.48}$$

Quindi, $\forall \varepsilon > 0$, $k \geq \frac{2(1+\varepsilon)\log n}{(1-c)^2}$

$$\mathbb{P}_n\left(|V(C_v)| \geq k+1\right) \leq e^{-(1+\varepsilon)\log n}, \tag{2.49}$$

$$\mathbb{P}_n\left(\exists v \in V_n : |V(C_v)| \geq k+1\right) \leq \sum_{v \in V_n} \mathbb{P}_n\left(|V(C_v)| \geq k+1\right) \leq n e^{-(1+\varepsilon)\log n}. \tag{2.50}$$

c>1 *Siano $k_- := \frac{16c}{(c-1)^2}\log n$ e $k_+ := n^{\frac{2}{3}}$. Dimostriamo che non esistono componenti del grafo aleatorio la cui taglia è compresa tra i valori k_- e k_+. A tal fine è sufficiente dimostrare che da qualsiasi vertice si inizializza la procedura di costruzione dell'insieme dei vertici di una componente del grafo aleatorio, dopo $k \in (k_-, k_+)$ iterazioni, la probabilità che la procedura si arresti prima di aver aggiunto almeno $\frac{(c-1)k}{2}$ nuovi vertici, tende a zero per $n \to \infty$. Più precisamente, sia*

$$\begin{aligned}B_v(k) := \{G \in \mathbb{G}_n : &\textit{ alla } k\textit{-sima iterazione, la procedura termina prima} \\ &\textit{di aver aggiunto a } V(C_v(G)) \textit{ almeno } \frac{(c-1)k}{2} \textit{ nuovi vertici}\Big\}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Notiamo che $B_v(k) \subseteq \{|V(C_v)| \le k + \frac{(c-1)}{2}k = \frac{c+1}{2}k\}$ *e* $\forall i \ge 0, x > 0\, \mathbb{P}(X_i \le x) \ge \mathbb{P}\left(X_i^- \le x\right)$*, dove le* X_i^- *si distribuiscono secondo la legge binomiale di parametri* $n - \frac{c+1}{2}k_+, \frac{c}{n}$*. Dunque, procedendo come nel caso precedente, posto* $\varepsilon = \frac{c+1}{2n^{\frac{1}{3}}}$,

$$\mathbb{P}_n(B_v(k)) \le \mathbb{P}_n\left(|V(C_v)| \le \frac{c+1}{2}k\right) \le \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i^- \le \frac{c+1}{2}k\right) \le e^{-(1-\varepsilon)nkH\left(\frac{c+1}{2(1-\varepsilon)}|\frac{c}{n}\right)} \le e^{-\frac{(c-1)^2}{9c}k}\,. \tag{2.52}$$

Allora

$$\mathbb{P}_n\left(\bigcup_{v\in V_n}\bigcup_{k\in(k_-,k_+)} B_v(k)\right) \le n \sum_{k\in(k_-,k_+)} e^{-\frac{(c-1)^2}{9c}k} \le n^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{(c-1)^2}{9c}k_-} = n^{-\frac{1}{9}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{2.53}$$

Quindi, quindi la taglia di una componente del grafo aleatorio o è al più pari a k_- *o è maggiore di* k_+*, poiché quanto sopra esposto dimostra che la probabilità che la procedura di costruzione dell'insieme dei vertici di una componente del grafo aleatorio, dopo* $k \in (k_-, k_+)$ *iterazioni, si arresti prima di raggiungere la* k_+*-sima iterazione, tende a zero per* $n \to \infty$.

Supponendo che, scelto $v \in V_n$*, la procedura sia giunta alla* k_+*-iterazione, allora i nuovi vertici da aggiungere per costruire* $V(C_v(G))$ *sono almeno* $\frac{c-1}{2}k_+$*. Quindi, fissati* $v, u \in V_n$ *la probabilità che dopo la* k_+*-sima iterazione della procedura questi risultino ancora in due insiemi di vertici distinti è più piccola della probabilità che non si generino archi tra i restanti vertici ancora da aggiungere per completare* $V(C_v(G))$ *e* $V(C_u(G))$*, ovvero* $\left(1-\frac{c}{n}\right)^{\left(\frac{c-1}{2}k_+\right)^2}$*. Perciò,*

$$\mathbb{P}_n(|V(C_v)|, |V(C_u)| \ge k_+\,,\, C_v \cap C_u = \emptyset) \le \left(1-\frac{c}{n}\right)^{\left(\frac{c-1}{2}k_+\right)^2} \le e^{-\frac{c(c-1)^2}{4}n^{\frac{1}{3}}}\,, \tag{2.54}$$

$$\mathbb{P}_n(\exists \text{ al più 2 } u, v : |V(C_v)|, |V(C_u)| \ge k_+\,,\, C_v \ne C_u) \le n^2 e^{-\frac{c(c-1)^2}{4}n^{\frac{1}{3}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{2.55}$$

cioè la probabilità che esista un unica componente del grafo aleatorio di taglia maggiore di $n^{\frac{2}{3}}$ *tende a uno per* $n \to \infty$.

Per stimare la taglia della componente gigante, definiamo

$$Y := \sum_{v\in V_n} \mathbf{1}_{\{G\in\mathbb{G}_n\,:\,|V(C_v(G))|\le k_-\}}. \tag{2.56}$$

Allora, la taglia della componente gigante è $n - Y$*. Poiché se* $|V(C_v)| \le k_-$ $\forall i \ge 0, x > 0\, \mathbb{P}(X_i \le x) \ge \mathbb{P}\left(X_i^- \le x\right)$*, dove le* X_i^- *si distribuiscono secondo la legge binomiale* *di parametri* $n-k_-, \frac{c}{n}, \mathbb{P}_n(|V(C_v)| \leq k_-) \leq \pi_-$ *con* π_- *probabilità di estinzione del processo di diramazione di Galton & Watson con* $\xi \overset{D}{=} X_i^-$. *Allo stesso modo, poiché le* X_i *sono stocasticamente dominate dalle* X_i^+ *si ha che* $\mathbb{P}_n(|V(C_v)| \leq k_-) \geq \bar{\pi} = \pi - o(1)$ *dove* $\bar{\pi}, \pi$ *sono rispettivamente la probabilità di estinzione del processo di diramazione di Galton & Watson con* $\xi \overset{D}{=} X_i^-$ *e taglia minore o uguale a* k_- *e quella senza quest'ultima condizione. Poiché* $\pi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_c = 1-\beta_c$ *soluzione dell'equazione* $\beta_c + e^{-c\beta_c} = 1$, *(cfr. Esercizio 47), si ha*

$$\mathbb{E}_n(Y) = \sum_{v\in V_n} \mathbb{P}_n(|V(C_v)| \leq k_-) \asymp n(1-\beta_c) \,. \tag{2.57}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n(Y(Y-1)) &= \sum_{\substack{u,v\in V_n \\ u\neq v}} \mathbb{P}_n(|V(C_u)|, |V(C_v)| \leq k_-) \\ &= \sum_{\substack{u,v\in V_n \\ u\neq v}} \mathbb{P}_n(u \in C_v, |V(C_v)| \leq k_-) + \\ &+ \sum_{u,v\in V_n} \mathbb{P}_n(|V(C_u)|, |V(C_v)| \leq k_-\,, \, C_u \cap C_v = \emptyset) \\ &\leq k_- \sum_{v\in V_n} \mathbb{P}_n(|V(C_v)| \leq k_-) + (\mathbb{E}_n(Y))^2 \,,\end{aligned} \tag{2.58}$$

da cui segue

$$Var_n(Y) \leq n(1+\log n)(1-\beta_c) + o(1) << (\mathbb{E}_n(Y))^2 \asymp n^2(1-\beta_c)^2 \,. \tag{2.59}$$

Quindi per la disuguaglianza di Chebichev $\frac{Y}{\mathbb{E}_n(Y)} \overset{P}{\longrightarrow} 1$.

■

2.3.4 Connettività

Teorema 23 *Se* $np_n = c + \log n + o(1)\,,\, c > 0$, *allora la probabilità che un grafo aleatorio risulti connesso converge per* $n \to \infty$ *a* $e^{-e^{-c}}$.

Dimostrazione: Sia $I_u := \mathbf{1}_{\{H\in\mathbb{G}_n : N(u)=\emptyset\}}$ e $X := \sum_{u\in V_n} I_u$ percui $X(G)$ rappresenta il numero dei nodi isolati presenti nel grafo aleatorio G. Poiché,

$$\mathbb{E}_n(I_u) = (1-p_n)^{n-1} = e^{(n-1)\log\left(1-\frac{c+\log n + o(1)}{n}\right)} \asymp \frac{e^{-c}}{n}\,, \tag{2.60}$$

$\mathbb{E}_n(X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-c}$. Consideriamo ora $\forall 1 \leq r < n$, l'r-simo momento fattoriale di X, $(X)_r := X(X-1)\cdots(X-r+1)$.

$$\mathbb{E}_n((X)_r) = \sum_{\substack{u_i \in V_n, i=1,..,r \\ u_1 \neq .. \neq u_r}} \mathbb{E}_n(I_{u_1}\cdots I_{u_r}) = \frac{n!}{r!}\mathbb{E}_n(I_{u_1}\cdots I_{u_r}) \tag{2.61}$$
$$= \frac{n!}{r!}(1-p_n)^{r(n-r)+\binom{r}{2}} \asymp n^r(1-p_n)^{nr}$$
$$= n^r\left(1 - \frac{c+\log n + o(1)}{n}\right)^{nr} \asymp n^r e^{-r(c+\log n)} = \left(e^{-c}\right)^r.$$

Quindi, (cfr. [B2] Teoremi I.20, I.21) $X \xrightarrow{D} Y$ con Y v.a. distribuita decondo la legge di Poisson di parametro e^{-c}, perciò $\mathbb{P}_n(X=0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-c}}$.

Inoltre, $\forall 2 \leq k \leq \frac{n}{2}$, sia

$$\mathcal{I}_k := \{G \in \mathbb{G}_n : \exists H \subset G \text{ tale che } N(H) = \emptyset,\ |V(H)| = k\}, \tag{2.62}$$

cioè l'evento che una componente connessa isolata del grafo aleatorio abbia ordine k. Siccome ogni componente connessa di un grafo aleatorio di ordine k contiene un albero di albero dello stesso ordine e poiché $\forall k \geq 2, |\{T_k\}| = k^{k-2}$,

$$\mathbb{P}_n(\mathcal{I}_k) \leq \binom{n}{k} k^{k-2} p_n^{k-1}(1-p_n)^{k(n-k)}. \tag{2.63}$$

Per $k = 2$,

$$\mathbb{P}_n(\mathcal{I}_2) = \binom{n}{2} p_n (1-p_n)^{2(n-2)} \leq \frac{\log n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.64}$$

Per $3 \leq k \leq \frac{n}{2}$,

$$\log\binom{n}{k} \leq k\log\frac{n}{k} + (n-k)\log\frac{n}{n-k}, \tag{2.65}$$
$$\log \mathbb{P}_n(\mathcal{I}_k) \leq k\log\frac{n}{k} + (n-k)\log\frac{n}{n-k} + (k-2)\log k +$$
$$+ (k-1)\log p_n + k(n-k)\log(1-p_n)$$
$$\leq k\log n - \log k^2 p_n + k - k\left(1 - \frac{k}{n}\right) np_n := f_n(k).$$

Ma $f_n(k)$ è convessa e

$$f_n(3) \leq -\frac{3}{2}\log n;\ f_n\left(\frac{n}{2}\right) \leq -n, \tag{2.66}$$

perciò $f_n(k) \leq -\frac{3}{2}\log n$, $\forall k \in \{3,..,\frac{n}{2}\}$, da cui segue che $\mathbb{P}_n(\mathcal{I}_k) \leq e^{-\frac{3}{2}\log n}$ e

$$\mathbb{P}_n\left(\bigcup_{3\leq k\leq \frac{n}{2}} \mathcal{I}_k\right) \leq n e^{-\frac{3}{2}\log n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{2.67}$$

Dunque per $np_n = O(\log n)$ la probabilità che un grafo aleatorio sia costituito dalla sua componente gigante e da una collezione di vertici isolati tende ad uno per $n \to \infty$. ∎

Esercizio 24 *Dimostrare che se X è una v.a. distribuita secondo la legge di Poisson di parametro $\lambda > 0$, allora $\forall r \geq 1$, $\mathbb{E}\left((X)_r\right) = \lambda^r$.*

Esercizio 25 *Dimostrare la (2.65).*

Teorema 26 *Per ogni $k \geq 1$ intero, se $np_n = c + \log n + k \log\log n$,*

$$\mathbb{P}_n(\delta(G) = m) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta_{m,k}\left(1 - e^{-\frac{e^{-c}}{k!}}\right) + \delta_{m,k+1} e^{-\frac{e^{-c}}{k!}}\,. \tag{2.68}$$

Schema della dimostrazione: Ricordiamo che $\forall u \in V_n$, $\deg(u)$ si distribuisce secondo la legge binomiale di parametri $(n-1, p_n)$ e che questa si può approssimare con la legge di Poisson di parametro np_n. Inoltre, (cfr. [B2] Teoremi I.1 e III.2) se $np_n >> n^{-\frac{1}{2}}$ la distribuzione dei gradi dei punti del grafo aleatorio si può approssimare con quella di un vettore aleatorio di componenti i.i.d. poissoniane di parametro np_n. Sia $\{Y_i\}_{i=1,..,n}$ una collezione di n v.a.i.i.d. distribuite secondo tale legge. Allora,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n\left(\min_{i=1,..,n} Y_i > m\right) &= \left[\mathbb{P}_n(Y_1 > m)\right]^n = \left(1 - \mathbb{P}_n(Y_1 \leq m)\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{(np_n)^m}{m!} e^{-np_n}\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{m!}{(m-i)!\,(np_n)^i}\right]\right)^n,\end{aligned} \tag{2.69}$$

ma $\sum_{i=1}^m \frac{m!}{(m-i)!(np_n)^i} = o(1)$. Quindi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n\left(\min_{i=1,..,n} Y_i > m\right) &= \left(1 - \frac{1}{m!}(c + \log n + k\log\log n)^m \frac{e^{-c}}{n(\log n)^k}(1 + o(1))\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{(\log n)^{m-k} e^{-c}}{m! n}(1 + o(1))\right)^n \\ &= \exp n \log\left(1 - \frac{(\log n)^{m-k} e^{-c}}{m! n}(1 + o(1))\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & m < k \\ \exp\left(-\frac{e^{-c}}{k!}\right) & m = k \\ 0 & m > k \end{cases}.\end{aligned} \tag{2.70}$$

Poiché $\mathbb{P}_n(\min_{i=1,..,n} Y_i = m) = \mathbb{P}_n(\min_{i=1,..,n} Y_i > m-1) - \mathbb{P}_n(\min_{i=1,..,n} Y_i > m)$ si ha la tesi. ∎

2.3.5 Diametro di un grafo aleatorio

Teorema 27 *Sia* $\forall \varepsilon > 0$, $np_n = (1+\varepsilon)\log n$. *Allora,*

$$\frac{\log n}{\log\log n} \leq diam\,(G_p) \leq 2\frac{\log n}{\log\log n}\,. \tag{2.71}$$

Schema della dimostrazione: Dato $u \in V_n$, poniamo $N_1(u) = N(u)$ e definiamo

$$N_k(u) := N(N_{k-1}(u))\,, \quad 2 \leq k \leq n\,. \tag{2.72}$$

Allora $C_u = \bigvee_{k\geq 1} N_k(u)$ e $Y_k := |N_k(u)|$. Procedendo come nella dimostrazione della disuguaglianza di Chernov, dal Lemma (37) si ha che

$$\mathbb{P}_n\left(Y_1 \geq \sqrt{\log n}\right) \leq e^{-\left[\sqrt{\log n}\log\frac{\sqrt{\log n}}{(1+\varepsilon)\log n} - \sqrt{\log n} + (1+\varepsilon)\log n\right]} \leq e^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\log n} = n^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} \tag{2.73}$$

Poiché subordinatamente a Y_{k-1}, Y_k ha distribuzione binomiale di parametri $n - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i$ e $(1-(1-p_n))^{Y_{k-1}}$ (cfr. [B2] Lemma X.2.6), ragionando analogamente alla stima precedente si ha

$$\mathbb{P}_n\left(Y_2 \leq Y_1\sqrt{\log n}|Y_1 \geq \sqrt{\log n}\right) \leq n^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\,, \tag{2.74}$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}_n\left(Y_k \leq Y_{k-1}\sqrt{\log n}|Y_{k-1} \geq (\log n)^{\frac{k-1}{2}}\right) \leq n^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\,.$$

Quindi, scelto un vertice del grafo u, il numero di passi k da effettuare per esplorare la sua componente connessa e realizzare che la sua taglia è $\sqrt{n}$ è $\frac{\log n}{\log\log n}$, perciò

$$\mathbb{P}_n\left(|C_u| \leq \sqrt{n}\right) \leq n^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}\frac{\log n}{\log\log n} \leq n^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)}, \tag{2.75}$$

$$\mathbb{P}_n\left(\exists u \in V(G) : |C_u| \leq \sqrt{n}\right) \leq n^{-\frac{\varepsilon}{3}}\,. \tag{2.76}$$

Ciò dimostra che $\forall u \in V_n$, la taglia della sua componente connessa è maggiore di $\sqrt{n}$ e che nel caso $|C_u| \leq \sqrt{n}$, la distanza tra $v \in C_u$ e u è al più $\frac{\log n}{\log\log n}$. Inoltre, se C_u, C_v sono tali che $|C_u|, |C_v| \geq \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n\left(E_G(C_u, C_v) = \emptyset\right) &= (1-p_n)^{|C_u||C_v|} \leq (1-p_n)^n \\ &= \left(1 - \frac{(1+\varepsilon)\log n}{n}\right)^n \leq n^{-(1+\varepsilon)}\,. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Allora,

$$\mathbb{P}_n\left(\exists\{u,v\} \in V_n \times V_n : E_G(C_u, C_v) = \emptyset\right) \leq n^{-\varepsilon} \tag{2.78}$$

da cui segue che la distanza tra due punti di G_p è al più $2\frac{\log n}{\log\log n}$. ■

Parte II

Percolazione di Bernoulli

Capitolo 3

Il modello ed il fenomeno critico

cfr. [G] Cap.1, Par. 1.1-1.5 .

Capitolo 4

Eventi crescenti

cfr. [G] Cap.2 Par. 2.1 .

4.1 Disuguaglianza FKG

cfr. [G] Cap.2 Par. 2.2 .

4.2 Disuguaglianza BK

cfr. [G] Cap.2 Par. 2.3 .

4.3 Formula di Russo

cfr. [G] Cap.2 Par. 2.4 .

Capitolo 5

Unicità del punto critico

cfr. [G] Cap.3 Par. 3.3 .

5.1 Il caso bidimensionale

cfr. [G] Cap.9 Par. 9.1-9.3 .

Parte III

Appendice

Laddove non espressamente specificato, per la notazione, si rimanda all'indice delle notazioni ed al cap. 1 di [JŁA]. In particolare, per $n \to \infty$:

$a_n \asymp b_n$ se $a_n = O(b_n)$, $b_n = O(a_n)$;

$a_n << b_n$ o $b_n >> a_n$ se $a_n \geq 0$ e $a_n = o(b_n)$.

Capitolo 6

Elementi di teoria dei grafi

I grafi considerati in queste note sono così definiti.

Dato un insieme V sia $\mathcal{P}_2(V) := \{A \subseteq V : |A| = 2\}$ e

$$V \times \mathcal{P}_2(V) \ni (v, e) \longmapsto \mathbf{1}_e(v) \in \{0, 1\}. \tag{6.1}$$

Definiamo quindi

$$V(e) := \{v \in V : \mathbf{1}_e(v) = 1\} \quad e \in \mathcal{P}_2(V). \tag{6.2}$$

Dato $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$, evetualmente vuoto, sia $V(E) := \bigcup_{e \in E} V(e)$. Una coppia (V', E) tale che $V(E) \subseteq V' \subseteq V$, è detto *grafo* di insieme dei *vertici* V' e insieme degli *archi (lati)* E. In particolare:

- $\forall V' \subseteq V$ il grafo associato alla coppia $(V', \emptyset)$ è detto grafo *vuoto* d'insieme dei vertici V';
- il grafo il cui insieme dei vertici è l'insieme vuoto, ed il cui insieme degli archi è quindi vuoto è detto grafo *nullo* ed è indicato dal simbolo $\emptyset$;
- $\forall V' \subseteq V$ il grafo $(V', \mathcal{P}_2(V'))$ è detto grafo *completo* d'insieme di vertici V'.

Quindi, se G è un grafo: $G = (V(G), E(G))$, dove $V(G)$ ed $E(G)$ indicano l'insieme dei vertici e degli archi di G e $V(G) \supseteq V(E(G))$. In particolare, $K(V) := (V, \mathcal{P}_2(V))$ e $K(E) := K(V(E))$.

Se $V(G) = V$, $V(e)$ si dice insieme dei vertici *adiacenti* rispetto ad e, Inoltre

$$E_G(v) := \{e \in E(G) : \mathbf{1}_e(v) = 1\} \quad v \in V, \tag{6.3}$$

è detto insieme degli archi (o dei lati) *incidenti* nel vertice v e

$$\bar{N}(v) := \bigcup_{e \in E(v)} V(e) \tag{6.4}$$

è detto *intorno chiuso* del vertice v. Definiamo inoltre, $N(v) := \bar{N}(v) \backslash \{v\}$ l'*intorno* del vertice v. Allo stesso modo $\forall V' \subseteq V$ siano $\bar{N}(V') := \bigcup_{v \in V'} \bar{N}(v)$ l'intorno chiuso di V' e $N(V') = \bar{N}(V') \backslash V'$ l'intorno di V'.

Dato un grafo $G = (V(G), E(G))$, il grafo $G' = (V(G'), E(G'))$ tale che $E(G') \subseteq E(G)$ e $V(E(G')) \subseteq V(G') \subseteq V(G)$ è detto sottografo di G $(G' \subseteq G)$. In particolare:

- se $V' \subset V(G)$, il sottografo $G(V') = (V', E(V'))$ tale che $E(V') = E(G) \cap \mathcal{P}_2(V')$ è detto grafo *indotto (o spanned)* da V';
- se $E \subset \mathcal{P}_2(V(G))$, il sottografo $G(E) = (V, E_G)$ tale che $E_G = E \cap E(G)$ è detto *spanning*;

pertanto ogni grafo G può essere considerato come sottografo spanning di $K(V(G))$. Inoltre, $\forall V', V'' \subseteq V$,

$$E_G(V', V'') := \{e \in E(G) : |V(e) \cap (N(V') \cap V'')| = |V(e) \cap (N(V'') \cap V')| = 1\} \tag{6.5}$$

è l'insieme degli archi di G che connettono i vertici di V' con quelli di V''.

Due grafi G e G' si diranno:

- *disgiunti* $(G \cap G' = \emptyset)$ se $V(G) \cap V(G') = \emptyset$;
- *e-disgiunti* o *separati* $(G \cap^e G' = \emptyset)$ se $E(G) \cap E(G') = \emptyset$.

Dati due grafi G e G' il grafo $G'' := G \cup G' = (V(G) \cup V(G'), E(G) \cup E(G'))$ è detto *unione* di G e G'. Inoltre un grafo G di dirà *connesso* se non può essere realizzato come unione di due o più grafi disgiunti. In caso contrario, i sottografi connessi di G massimali, ovvero quelli che non sono sottografi connessi di nessun altro sottografo connesso di G, sono detti *componenti (connesse o isolate)* di G.

Dato un grafo $G = (V(G), E(G))$, siano $v_G := |V(G)|$ *l'ordine di* G e $e_G := |E(G)|$.

$\forall v \in V$, $\deg(v) := |E(v)| = |N(v)|$ è detto grado del vertice v.

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} \deg(v) \ , \ \Delta(G) := \max_{v \in V(G)} \deg(v) \tag{6.6}$$

sono detti rispettivamente *grado minimo* e *grado massimo* di G. Ovviamente,

$$0 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq v_G - 1 \, . \tag{6.7}$$

Definiamo $d(G) := \frac{e_G}{v_G}$ la *densità* di G, allora $\frac{1}{v_G} \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\frac{e_G}{v_G} = 2d(G)$. Inoltre,

$$m(G) := \max \left\{ \frac{e_H}{v_H} : H \subseteq G, \, v_H > 0 \right\} \tag{6.8}$$

è detta *densità massima* di G. Allora, un grafo G tale che $m(G) = d(G)$ è detto essere *bilanciato* ovvero se $\forall H \subseteq G$, $d(H) \leq d(G)$. Nel caso in cui $\forall H \subset G$, $d(H) < d(G)$, G è detto essere *strettamente bilanciato.*

Due grafi G e G' si diranno isomorfi ($G \sim G'$) se esiste un'applicazione biunivoca
$\pi : V(G) \longrightarrow V(G')$ tale che se $v, v' \in V(G)$ sono adiacenti allora anche
$\pi(v), \pi(v') \in \pi(V(G)) = V(G')$ sono adiacenti. In altre parole, se esiste un'applicazione biunivoca π da $V(G)$ in sé, tale che, dato $v \in V(G)$, se $v' \in N(v)$ allora $\pi(v') \in N(\pi(v))$ e il grafo $(V(G), E')$, con

$$E' = \{e' \in \mathcal{P}_2(V(G)) : \exists e \in E(G) \text{ tale che } V(e') = \pi(V(e))\}, \tag{6.9}$$

è detto essere isomorfo a G.

Per la ulteriori nozioni di teoria dei grafi, nonché per estensioni e generalizzazioni di quanto sopra esposto, si rimanda a [AS], [B1, B2] e [JŁA].

Capitolo 7

Alcune nozioni di Calcolo delle Probabilità

Quanto di seguito esposto ha scopo quasi esclusivamente notazionale. Verranno introdotte inoltre alcune nozioni di Calcolo delle Probabilità che generalmente non sono trattate nei corsi di base mentre, per quanto riguarda quelle di base, si rimanda ai testi standard sull'argomento, per esempio [S], a meno che non sia diversamente specificato.

Sia Ω un insieme e $\mathcal{F}$ una σalgebra di suoi sottoinsiemi. La coppia $(\Omega, \mathcal{F})$ è detta *spazio misurabile.* Nel caso in cui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ si assumerà $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, ovvero (sub)$\sigma$algebra della σalgebra dei boreliani di $\mathbb{R}^n$.

Data una coppia di spazi misurabili $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\Xi, \mathcal{X})$, un'applicazione $X : \Omega \longrightarrow \Xi$ è detta *misurabile* se $\forall B \in \mathcal{X}$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Una *variabile aleatoria* è un'applicazione misurabile tra $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, un vettore aleatorio è un'applicazione misurabile tra $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, mentre una generica applicazione misurabile tra spazi misurabile è detta *elemento aleatorio.*

Sia $\mathfrak{P}(\Omega, \mathcal{F})$ l'insieme delle misure di probabilità sullo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$. Scelto un elemento $\mathbb{P} \in \mathfrak{P}(\Omega, \mathcal{F})$, la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è detta spazio *di probabilità* (*probabilizzato*). Inoltre, sia

$$\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}} := \{A \subseteq \Omega : \exists A_-, A_+ \in \mathcal{F} \,\text{tale che}\, A_- \subseteq A \subseteq A_+,\, \mathbb{P}(A_+ \backslash A_-) = 0\} \supseteq \mathcal{F}. \tag{7.1}$$

$\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$ è una σalgebra, ed è detta *completamento* di $\mathcal{F}$ rispetto a $\mathbb{P}$. Ne segue che $\mathbb{P}$ si può estendere a $\overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$ definendo $\forall A \in \overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_-)$ e quindi considerare lo spazio di probabilità $\left(\Omega, \overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}, \mathbb{P}\right)$ *completamento* di $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è detto *completo.*

Sia $\Omega = \mathbb{R}^\infty$ l'insieme delle applicazioni a valori reali definite su un insieme numerabile. Dato un insieme finito di indici Λ e un boreliano $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{|\Lambda|}\right)$, indicando con ω_Λ la proiezione di una realizzazione ω su $\Omega_\Lambda = \mathbb{R}^\Lambda$ che è isomorfo a $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$, sia

$$C_\Lambda(B) = \{\omega \in \Omega : \omega_\Lambda \in B\} \tag{7.2}$$

l'insieme cilindrico (*cilindro*) di base $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\Lambda}\right)$ e $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty})$ la σalgebra generata dagli insiemi cilindrici.

Teorema 28 *(di Carathéodory) Sia Ω un insieme, $\mathcal{A}$ un'algebra dei suoi sottoinsiemi e $\sigma(\mathcal{A})$ la più piccola σalgebra contenente $\mathcal{A}$. Data μ_0 una misura σadditiva su $(\Omega, \mathcal{A})$. Esiste un unica misura μ su $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ estensione di μ_0, ovvero tale che $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = \mu_0(A)$.*

Teorema 29 *(di Kolmogorov sull'estensione di misure su $(\mathbb{R}^{\infty}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty}))$)*

Sia $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 1},\ \mathbb{P}_n \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ una collezione di misure di probabilità tali che $\forall n \geq 1,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{P}_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}_n(B). \tag{7.3}$$

Allora $\exists! \mathbb{P} \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^{\infty}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty}))$ tale che se $\forall n \geq 1,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\ C_n(B) = C_{\{1,..,n\}}(B)$,

$$\mathbb{P}(C_n(B)) = \mathbb{P}_n(B). \tag{7.4}$$

Dimostrazione: $\forall n \geq 1,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, assegnamo a $\mathbb{P}(C_n(B))$ il valore $\mathbb{P}_n(B)$. Allora poiché

$$\begin{aligned} C_n(B) &= \{\omega \in \mathbb{R}^{\infty} : \omega_{\{1,..,n\}} \in B,\ \omega_{\{n+1,..,n+k\}} \in \mathbb{R}\} \qquad (7.5)\\ &= C_{\{1,..,n+k\}}\left(B \times \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{k\,volte}\right) = C_{n+k}(B \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}), \end{aligned}$$

per la (7.3), la definizione di $\mathbb{P}(C_n(B))$ è indipendente dalla rappresentazione scelta di $C_n(B)$ infatti

$$\mathbb{P}_n(B) = \mathbb{P}_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = ... = \mathbb{P}_{n+k}(B \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}). \tag{7.6}$$

Sia $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{\infty})$ la collezione di tutti i cilindri $C_n(B)$ al variare di $n \geq 1$ e $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. È facile vedere che $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{\infty})$ è un algebra. Dato $k \geq 2$ e $A_1, .., A_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{\infty})$ disgiunti, $\exists n \geq 1$ e $B_1, .., B_k \in \mathbb{R}^n$ boreliani disgiunti tale che $A_i = C_n(B_i),\ i = 1, .., k$. Allora,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_n(B_i)\right) = \mathbb{P}\left(C_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}_n(B_i) \qquad (7.7)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(C_n(B_i)) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i), \end{aligned}$$

ovvero $\mathbb{P}$ è finitamente additiva sull'algebra $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{\infty})$. Se $\mathbb{P}$ è anche σadditiva su $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{\infty})$ allora la tesi segue dal teorema precedente. A tal fine è sufficiente dimostrare che, per una generica successione di elementi di $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{\infty})$, $\{C_n(B_n)\}_{n\geq 1}$ tale che $C_n(B_n) \downarrow \emptyset$, $\mathbb{P}(C_n(B_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Supponiamo il contrario, ovvero $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(C_n(B_n)) = \delta > 0$. Poiché $\forall n \geq 1$, $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dato $\delta > 0$ esiste $A_n \subseteq B_n$ tale che $\mathbb{P}_n(B_n \backslash A_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}$, allora,

$$\mathbb{P}(C_n(B_n)\backslash C_n(A_n)) = \mathbb{P}_n(B_n\backslash A_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{7.8}$$

Sia $\bar{C}_n := \bigcap_{k=1}^n C_k(A_k)$ e sia D_n tale che $\bar{C}_n = C_n(D_n)$. Poiché $\{C_n(B_n)\}_{n\geq 1}$ è decrescente, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_n(B_n)\backslash C_n(D_n)) &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(C_n(B_n)\backslash C_k(A_n)) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(C_k(B_n)\backslash C_k(A_n)) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\delta}{2^{k+1}} = \frac{\delta}{2},\end{aligned} \tag{7.9}$$

ma per ipotesi $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(C_n(B_n)) = \delta > 0$ e quindi $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(C_n(D_n)) \geq \frac{\delta}{2} > 0$. Ma ciò contraddice l'ipotesi che $C_n(D_n) \downarrow \emptyset$. Infatti, $\forall n \geq 1$ sia $x^{(n)} \in C_n(D_n)$, allora $\left(x_1^{(n)}, .., x_n^{(n)}\right) \in D_n$. Inoltre, poiché D_1 è compatto, esiste una sottosuccessione $\{n_1\}$ di $\{n\}$ tale che $x_1^{(n_1)} \to x_1^0 \in D_1$. Allo stesso modo è possibile scegliere $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ tale che $\left(x_1^{(n_2)}, x_2^{(n_2)}\right) \to (x_1^0, x_2^0) \in D_2$. Iterando questa costruzione si ha

$$\forall k \geq 1, \left(x_1^{(n_k)}, .., x_k^{(n_k)}\right) \to \left(x_1^0, .., x_k^0\right) \in D_k. \tag{7.10}$$

Considerando la sottosuccessione diagonale $\{m_k\}$ segue che $\forall i \geq 1, x_i^{(m_k)} \to x_i^0$ e $(x_1^0, ..) \in C_n(D_n)$ $\forall n \geq 1$ contrariamente all'ipotesi che $C_n(D_n) \downarrow \emptyset$. ■

7.0.1 Disuguaglianza di Markov, sue generalizzazioni e applicazioni

Proposizione 30 *(Disuguaglianza di Markov) Sia X una v.a. non negativa definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\forall \lambda > 0$ vale*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) > \lambda\} \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda} \tag{7.11}$$

Dimostrazione: $\forall \lambda > 0$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{[0,\lambda]}(X)\right) + \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{(\lambda,+\infty)}(X)\right) \geq \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{(\lambda,+\infty)}(X)\right) \\ &\geq \lambda\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{(\lambda,+\infty)}(X)\right) = \lambda\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) > \lambda\}.\end{aligned} \tag{7.12}$$

■

Corollario 31 *Se f è una funzione non negativa, strettamente crescente e X una v.a. definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\forall \lambda > 0$ si ha*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) > \lambda\} \leq \frac{\mathbb{E}(f(X))}{f(\lambda)}. \tag{7.13}$$

Dimostrazione: Poiché f è strettamente crescente

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) > \lambda\} = \mathbb{P} \circ X^{-1}[\lambda, +\infty) = \mathbb{P} \circ X^{-1}\{x \in \mathbb{R} : f(x) > f(\lambda)\}, \tag{7.14}$$

e siccome f è non negativa, dalla disuguaglianza di Markov segue

$$\mathbb{P} \circ X^{-1}\{x \in \mathbb{R} : f(x) > f(\lambda)\} \leq \frac{\int \mathbb{P} \circ X^{-1}(dx) f(x)}{f(\lambda)} = \frac{\mathbb{E}(f \circ X)}{f(\lambda)}.$$

■

Osservazione 32 *(Disuguagluanza di Markov esponenziale) Il precedente risultato implica che $\forall r, \lambda > 0$,*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) > \lambda\} \leq e^{-r\lambda}\mathbb{E}\left(e^{rX}\right). \tag{7.15}$$

Quindi

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) > \lambda\} \leq \inf_{r>0} e^{-r\lambda}\mathbb{E}\left(e^{rX}\right) = e^{-\sup_{r>0}[r\lambda - \log \mathbb{E}\left(e^{rX}\right)]}. \tag{7.16}$$

Corollario 33 *(Disuguaglianza di Chebichev) Sia X una v.a. definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\forall \varepsilon > 0$ vale*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}. \tag{7.17}$$

Dimostrazione: Si ponga $Y := |X - \mathbb{E}(X)|$ e si applichi il corollario precedente considerando $f = x^2$. ■

Esercizio 34 *Dimostrare la disuguaglianza di Chebichev generalizzata*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^p)}{\varepsilon^p}, \quad p > 0. \tag{7.18}$$

Proposizione 35 *(Disuguaglianza di Chernov per schemi di Bernoulli) Sia $\{\xi_n\}_{n>0}$ una successione di v.a.i.i.d. con distribuzione di Bernoulli di parametro p definite su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Allora, se $S_n(\omega) := \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega)$, vale la stima*

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \leq 2e^{-n[H(p-\varepsilon) \wedge H(p+\varepsilon)]} \leq 2e^{-2n\varepsilon^2} \tag{7.19}$$

dove $H(x) := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}}[\lambda x - \log \mathbb{E}\left(e^{\lambda\xi}\right)]$.

Dimostrazione: Per la disuguaglianza di Markov esponenziale, $\forall a \in (0,1)$

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} > a\right\} \leq e^{-\sup_{\lambda>0}\left(\lambda a - \log \mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{S_n}{n}}\right)\right)}, \tag{7.20}$$

ma poiché gli elementi della successione $\{\xi_n\}_{n>0}$ sono v. a. indipendenti identicamente distribuite,

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{S_n}{n}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda}{n}\xi_i}\right) = \left(\mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda}{n}\xi_1}\right)\right)^n \tag{7.21}$$

dove

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda\xi_1}\right) = 1 - p + e^{\lambda} p\,. \tag{7.22}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} > a\right\} &\leq e^{-\sup_{\lambda>0}\left(\lambda a - n\log \mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda}{n}\xi_1}\right)\right)} \leq e^{-\sup_{\lambda>0} n\left(\frac{\lambda}{n}a - \log \mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda}{n}\xi_1}\right)\right)} \\ &\leq e^{-n\sup_{s>0}\left(sa - \log \mathbb{E}\left(e^{s\xi_1}\right)\right)}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Allo stesso modo si ottiene

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} < a\right\} \leq e^{-n\sup_{s<0}\left(sa - \log \mathbb{E}\left(e^{s\xi_1}\right)\right)}. \tag{7.24}$$

Consideriamo ora la funzione

$$\mathbb{R} \ni s \longmapsto f(s,a) := sa - \log(1 - p(1-e^s)) = sa - \log \mathbb{E}\left(e^{s\xi_1}\right) \in \mathbb{R}.$$

Allora,

$$\partial_s f = a - \frac{\mathbb{E}\left(\xi_1 e^{s\xi_1}\right)}{\mathbb{E}\left(e^{s\xi_1}\right)} = a - \frac{pe^s}{(1 - p(1-e^s))} \tag{7.25}$$

$$\partial_s^2 f = -\frac{\mathbb{E}\left(\xi_1^2 e^{s\xi_1}\right)}{\mathbb{E}\left(e^{s\xi_1}\right)} + \frac{\mathbb{E}^2\left(\xi_1 e^{s\xi_1}\right)}{\mathbb{E}^2\left(e^{s\xi_1}\right)} = \frac{pe^s}{(1-p(1-e^s))}\left(\frac{pe^s}{(1-p(1-e^s))} - 1\right) \tag{7.26}$$

Sia $\bar{s}(a,p)$ tale che $\partial_s f \restriction_{\bar{s}} = 0$.

$$e^{\bar{s}} = \frac{a(1-p)}{p(1-a)} \Longrightarrow \bar{s}(a,p) = \log \frac{a(1-p)}{p(1-a)} \tag{7.27}$$

perciò $s \geq 0$ se e solo se $\frac{a(1-p)}{p(1-a)} \geq 1$. Quindi, posto $x = \frac{a}{p}$ si ha $x(1-p) \geq 1 - px$ ovvero $x \geq 1$, cioè $a \in [p,1)$. Inoltre $\partial_s^2 f \restriction_{\bar{s}} = a(a-1) < 0$, quindi

$$H(a) := \sup_{s>0} f(s,a) = f(\bar{s},a) = a \log \frac{a}{p} + (1-a)\log \frac{1-a}{1-p}\,. \tag{7.28}$$

Posto $a = p + x,\ x \in (0, 1-p)$, sia $h_+(x) := H(p+x)$. Allora $\exists \xi \in (0, x)$ tale che

$$h_+(x) = h_+(0) + h'_+(0)\, x + \frac{1}{2} h''_+(\xi)\, x^2 = \frac{1}{2} h''_+(\xi)\, x^2 \geq 2x^2 \tag{7.29}$$

poiché $h_+(0) = h'_+(0) = 0$ e $h''_+(x) \geq 4\, \forall x \in [0, 1-p)$. Analogamente, se $a \in (0, p)$ si ottiene

$$\sup_{s<0} f(s, a) = f(\bar{s}, a) = H(a)\ . \tag{7.30}$$

Posto $a = p - x,\ x \in (0, p)$, e $h_-(x) := H(p-x)$, $\exists \xi \in (0, x)$ tale che

$$h_-(x) = h_-(0) + h'_-(0)\, x + \frac{1}{2} h''_-(\xi)\, x^2 = \frac{1}{2} h''_-(\xi)\, x^2 \geq 2x^2\ . \tag{7.31}$$

Dunque $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} > p + \varepsilon\right\} \leq e^{-nH(p+\varepsilon)} \leq e^{-2\varepsilon^2 n} \tag{7.32}$$

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} < p - \varepsilon\right\} \leq e^{-nH(p-\varepsilon)} \leq e^{-2\varepsilon^2 n} \tag{7.33}$$

perciò

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \qquad (7.34) \\ & = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} > p + \varepsilon\right\} \cap \left\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} < p - \varepsilon\right\}\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} > p + \varepsilon\right\} + \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} < p - \varepsilon\right\} \\ & \leq e^{-nH(p+\varepsilon)} + e^{-nH(p-\varepsilon)} \leq 2e^{-n[H(p-\varepsilon) \wedge H(p+\varepsilon)]} \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

■

Esercizio 36 *Dimostrare che per una qualsiasi v. a. X la funzione*

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto H(x) := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} [\lambda x - \log \mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)] \in \overline{\mathbb{R}^+} \tag{7.35}$$

che assume valori finiti su $\Lambda_X := \left\{\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{E}\left(e^{\lambda|X|}\right) < \infty\right\}$ e vale $+\infty$ su $\mathbb{R} \backslash \Lambda_X$ è convessa.

Lemma 37 *Siano $p, q \in (0, 1)$ e*

$$H(q|p) := q \log \frac{q}{p} + (1-q) \log \frac{1-q}{1-p} \tag{7.36}$$

*l'*entropia relativa *di una v.a. distribuita secondo la legge di Bernoulli di parametro p. Allora $\forall n \geq 1$*

$$nH\left(\frac{q}{n} | \frac{p}{n}\right) \geq q \log \frac{q}{p} + p - q \tag{7.37}$$

Dimostrazione:

$$nH\left(\frac{q}{n}|\frac{p}{n}\right) = n\left[\frac{q}{n}\log\frac{q}{p} + \frac{(n-q)}{n}\log\left(\frac{n-q}{n-p}\right)\right] \tag{7.38}$$
$$= q\log\frac{q}{p} - (n-q)\log\left(\frac{n-p}{n-q}\right)$$

Siccome $\log x \leq x - 1$ si ha

$$(n-q)\log\left(\frac{n-p}{n-q}\right) \leq n - p - (n-q) = q - p \tag{7.39}$$

da cui segue la tesi. ∎

7.1 Convergenza di successioni di v.a.

7.1.1 Convergenza quasi certa

Definizione 38 *Una successione di v.a.* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definita su uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *è detta* convergere quasi certamente rispetto a $\mathbb{P}$ *($\mathbb{P}$-q.c.) ad una variabile aleatoria* ξ *se*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\} = 0\,. \tag{7.40}$$

Equivalentemente, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$-q.c. a ξ se e solo se $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \sup_{k\geq n}|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right\} = 0\,. \tag{7.41}$$

7.1.2 Convergenza in probabilità

Definizione 39 *Una successione di v.a.* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definita su uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *è detta* convergere in probabilità *ad una variabile aleatoria* ξ *(*$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$*) se*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} = 0\,. \tag{7.42}$$

Equivalentemente, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ξ in probabilità, se converge nella metrica

$$\rho_{\mathbb{P}}(\xi, \eta) := \inf\{\varepsilon > 0 : \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |\xi(\omega) - \eta(\omega)| > \varepsilon\} < \varepsilon\}\,. \tag{7.43}$$

7.1.3 Convergenza in media di ordine p

Definizione 40 *Una successione di v.a.* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definita su uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *è detta* convergere in media di ordine p, *con* $0 < p < \infty$, *ad una variabile aleatoria* ξ *(*$\xi_n \xrightarrow{p} \xi$*) se*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|\xi_n - \xi|^p\right) = 0\,. \tag{7.44}$$

Considerando la relazione di equivalenza tra le v.a. su $(\Omega, \mathcal{F})$:

$$\xi \equiv \eta \ \mathbb{P} - q.c. \Leftrightarrow \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \neq \eta(\omega)\} = 0 \tag{7.45}$$

e costruendo gli spazi $L^p_{\mathbb{P}}(\Omega; \mathbb{R})$, $p \geq 1$, quanto sopra si traduce affermando che la successione i cui elementi corrisondono alle classi di equivalenza $\mathbb{P}$-q.c. delle ξ_n converge in $L^p_{\mathbb{P}}(\Omega; \mathbb{R})$ alla classe di equivalenza $\mathbb{P}$-q.c. di ξ ($\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$).

7.1.4 Convergenza in distribuzione (legge)

Definizione 41 *Sia* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie ciascuna definita su uno spazio di probabilità* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ *e sia,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto F_n(x) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega_n : \xi_n(\omega) \leq x\} \in [0,1] \tag{7.46}$$

la funzione di distribuzione di ξ_n. $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è detta* convergere in distribuzione (legge) *ad una variabile aleatoria* ξ *definita su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *(*$\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ *o* $\xi_n \xrightarrow{L} \xi$*) se, indicando con* $F(x)$ *la funzione di distribuzione di* ξ*, la successione* $\{F_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $F(x)$*, per ogni* x *appartenente all'insieme dei punti di continuità di* F, $\mathfrak{C}_F$.

Equivalentemente, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ξ in distribuzione, se la successione $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a F nella metrica

$$\rho^{LP}(F', F) := \inf\{\varepsilon > 0 : F'(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq F(x) \leq F'(x+\varepsilon) + \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}\}\,. \tag{7.47}$$

La nozione di convergenza in distribuzione è anche equivalente alla convergenza debole della successione delle misure di probabilità di Lebesgue-Stieltjes definite su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ indotte dalle ξ_n a quella indotta da ξ (in simboli $F_n \xrightarrow{w} F$), ovvero $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ se e solo se $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_n(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF(x)\ . \tag{7.48}$$

Alternativamente, $F_n \xrightarrow{w} F$ se e solo se converge nella metrica

$$||F' - F||^*_{BL} = \sup_{f\in BL(\mathbb{R})\,:\,||f||_{BL}\leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF'(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF(x) \right|, \tag{7.49}$$

dove

$$BL(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : ||f||_{BL} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} < \infty \right\} \subset C_b(\mathbb{R}) \quad (7.50)$$

è lo spazio di Banach delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ limitate e lipshitziane.

Per studiare la convergenza in distribuzione di una successione di v.a. è spesso utile fare uso della corrispondenza biunivoca tra la funzione di distribuzione di una v.a. e la sua trasformata di Fourier, cioè la *funzione caratteristica* della v.a. stessa.

Consideriamo la successione di v.a. di cui alla definizione precedente nonché la corrispondente successione di funzioni di distribuzione e poniamo

$$\varphi_n(t) := \mathbb{E}\left(e^{it\xi_n}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_n(x) \ . \quad (7.51)$$

Se la successione di funzioni $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente ad una funzione $\varphi(t)$ che è continua in $t=0$, allora esiste F tale che $F_n \xrightarrow{w} F$, ovvero esiste una v.a. ξ tale che $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$, la cui funzione di distribuzione è F e la cui funzione caratteristica è $\varphi(t)$. Inoltre se

$$\mathbb{E}(|\xi|^n) < \infty \quad n \geq 1\,, \quad (7.52)$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{(\mathbb{E}(|\xi|^n))^{\frac{1}{n}}}{n} = R < \infty\,, \quad (7.53)$$

$$\varphi(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(\xi^n) \quad |t| < \frac{1}{eR} \quad (7.54)$$

in tal caso la distribuzione di probabilità di ξ può essere completamente determinata dalla conoscenza dei suoi momenti, in quanto antitrasformata di Fourier della φ. Se poi gli elementi della successione $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ assumono soltanto valori positivi, cioè $\forall n \in \mathbb{N}$, $suppF_n \subseteq \mathbb{R}^+$, quanto precedentemente espresso resta valido se si considera al posto della funzione caratteristica la *funzione generatrice dei momenti* di ξ_n,

$$\varphi_n(\lambda) := \mathbb{E}\left(e^{-\lambda\xi_n}\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF_n(x)\ , \quad (7.55)$$

cioè la trasformata di Laplace delle F_n.

Infine, definendo su $\mathfrak{P}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la norma

$$\begin{aligned} ||\mathbb{P} - \mathbb{P}'||_{var} &:= \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}'(A)| = \frac{1}{2} ||F - F'||_{BV} \quad (7.56) \\ &= \frac{1}{2} \sup_{f\in C_\infty(\mathbb{R})\,:\,||f||_\infty \leq 1} \left| \int f(x)\, dF(x) - \int f(x)\, dF'(x) \right| \,, \end{aligned}$$

dove F e F' sono le funzioni di distribuzione associate rispettivamente a $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$, e $C_\infty(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ è l'insieme delle funzioni continue che s'annullano nel limite di $|x| \uparrow \infty$, si può considerare la convergenza di successioni di misure di probabilità in questa topologia, detta *convergenza nella distanza variazionale*, che è più forte di quella in distribuzione.

Osservazione 42 *A differenza delle altre nozioni di convergenza che necessitano del fatto che gli elementi della successione* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ed il suo limite* ξ *siano v.a. definite sullo stesso spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F})$ *, quella di convergenza in legge, riguardando in definitiva esclusivamente le funzioni di distribuzione, prescinde da questa ipotesi. Tuttavia, come nel caso del modello* $\mathbb{G}(n,p)$ *, in cui si considerano v.a. definite su spazi di probabilità che sono distinti al variare di* n*, quando per esempio si vogliono confrontare le diverse nozioni di convergenza per la stessa successione di v.a., è utile considerare una successione di v.a., equivalente in distribuzione a quella data, i cui termini sono v.a. definite sullo stesso spazio di probabilità. Detta successione equivalente può essere costruita nel modo seguente. Notiamo dapprima che, se* F *è una funzione di distribuzione, si può definire la funzione* quantile *di* F

$$(0,1) \ni u \longmapsto Q(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\} \in \mathbb{R}\,. \tag{7.57}$$

Da ciò segue che $Q = F^{-1}$ *e che considerando* Q *come v.a. su* $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), du)$,

$$\int_{\{u\in(0,1)\,:\,Q(u)\leq x\}} du = \int_{\{u\in(0,1)\,:\,u\leq F(x)\}} du = F(x)\ , \tag{7.58}$$

ovvero Q *ammette come funzione di distribuzione proprio* F*. A questo punto, se* F_n, F *indicano rispettivamente le funzioni di distribuzione del termine* n*-simo della successione* ξ_n *e del suo limite* ξ*, la successione dei quantili assciati alle* F_n *è equivalente in distribuzione a* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e converge in distribuzione a* $Q \overset{D}{=} \xi$*.*

7.2 Processo di diramazione a tempo discreto e garfo di Galton-Watson

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e $\Omega \ni \omega \longmapsto \eta(\omega) \in \overline{\mathbb{N}}$ una variabile aleatoria tale che

$$\mathbb{P}\{\eta = k\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) = k\} = p_k \quad k \in \overline{\mathbb{N}}\,. \tag{7.59}$$

Consideriamo il campo aleatorio ξ su $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, dove $\mathcal{X} := \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}^2}$ e $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ è la σ-algebra generata dagli insiemi cilindrici della forma

$$C_{\mathbf{A}}(B) := \{\xi \in \mathcal{X} : \xi_{\mathbf{A}} \in B\} \quad \mathbf{A} \subset \mathbb{N}^2,\ |\mathbf{A}| < \infty\,;\ B \in \mathcal{P}\left(\overline{\mathbb{N}}^{|\mathbf{A}|}\right), \tag{7.60}$$

associato alla misura di probabilità $\mathbb{P}_\xi = \bigotimes_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^2} \mathbb{P}_{\xi_{\mathbf{n}}}$, con $\xi_{\mathbf{n}} \overset{D}{=} \eta$, $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$. Ovvero, se $\mathbf{n} = (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, allora resta definita la proiezione della configurazione ξ sul sito del reticolo $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ di coordinate i e j, $\xi_{i,j} \overset{D}{=} \eta$.

Definiamo allora le variabili aleatorie

$$\mathcal{X} \ni \xi \longmapsto u_m(\xi) \in \overline{\mathbb{N}}\,, \tag{7.61}$$

$$\mathcal{X} \ni \xi \longmapsto v_m(\xi) \in \overline{\mathbb{N}} \quad m \in \mathbb{N}\,, \tag{7.62}$$

in maniera ricorsiva, ovvero:

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 &:= 1\,, \\ u_{m+1} &:= \sum_{i=0}^{u_m-1} \xi_{i,m}\,, \\ v_{m+1} &:= v_m + u_{m+1} \end{aligned} \tag{7.63}$$

e, se $X_{i,j} \in \mathbb{R}^2$, $i,j \in \mathbb{N}$ rappresenta un punto di $\mathbb{R}^2$, per esempio quello di coordinate i e j, definiamo conseguentemente gli insiemi

$$\begin{aligned} U_m &:= \{X_{i,m}\}_{i=0}^{u_m-1} \subset \mathbb{R}^2\,, \\ V_0 = U_0\,;\ V_{m+1} &:= V_m \bigvee U_{m+1} = \bigvee_{k=0}^{m+1} U_k \subset \mathbb{R}^2\,, \\ B_m &:= \bigcup_{i=0}^{u_m-1} \bigcup_{j=0}^{\xi_{i,m}-1} \{X_{i,m}, X_{j,m+1}\}\,, \\ E_m &:= \bigvee_{k=0}^{m} B_k\,. \end{aligned} \tag{7.64}$$

Pertanto, $|U_m| = u_m$ e $|V_m| = v_m$. Possiamo quindi definire il grafo aleatorio $G(\xi) = (V(\xi), E(\xi))$ costruito tramite il seguente

passo 0 Si ponga $u_0 = v_0 = 1$, $U_0 = V_0 = \{(0,0)\}$, $G_0 := (U_0, \emptyset)$, $n = 0$ e si proceda al passo successivo.

passo n Si generi la collezione di variabili aleatorie $\{\xi_{i,n}\}_{i=0}^{u_n-1}$ e conseguentemente u_{n+1}, U_{n+1}, V_{n+1}, v_{n+1}, B_n e E_n secondo le (7.63), (7.64).

Sia $G_n(\xi) = G_{n+1} := (V_{n+1}, E_n)$.

Se $|B_n| > 0$, si ponga $n := n+1$ e si torni al passo n.

Se invece $|B_n| = 0$, stop.

Sia $T := \min\{n \geq 0 : |B_n| = 0\} = \min\{n \geq 1 : u_n = 0\}$. Poiché $\{u_n = 0\} \subseteq \{u_{n+1} = 0\}$, allora $\{T \leq n\} = \{u_n = 0\}$. Inoltre,

$$\{T < \infty\} = \bigcup_{n \geq 0} \{u_n = 0\} \tag{7.65}$$

è l'evento che $G(\xi)$ sia un grafo di taglia finita.

Osservazione 43 *$\{u_n\}_{n\geq 0}$ è una catena di Markov. Infatti,*

$$\mathbb{P}_\xi \{u_{n+1} = i | u_n = j, .., u_1 = j_1, u_0 = 1\} = \mathbb{P}_\xi \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} \xi_{k,n} = i \right\} = P_{j,i} \,. \tag{7.66}$$

dove $P_{j,i}$ è la matrice di probabilità di transizione associata alla catena. Inoltre, poiché

$$\mathbb{E}_\xi (u_{n+1} | u_n) = u_n \mathbb{E}_\xi (\eta) \quad n \geq 0 \,, \tag{7.67}$$

la successione di variabili aleatorie $\{Y_n\}_{n\geq 0}$, $Y_n = \frac{u_n}{(\mathbb{E}_\xi(\eta))^n}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale associata alla successione $\{u_n\}_{n\geq 1}$.

Esercizio 44 *Esprimere il generico elemento della matrice di transizione di probabilità della catena di Markov $P_{j,i}$ in funzione della distribuzione di η.*

D'ora in poi assumeremo che $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$. Sia

$$\varphi(z) := \mathbb{E}(z^\eta) = \sum_{k\geq 0} p_k z^k \quad z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \tag{7.68}$$

la funzione generatrice di η e $\forall n \geq 0$, $\varphi_n(z) := \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_\xi\{u_n = k\} z^k$. Chiaramente $\varphi_0(z) = s$ e $\varphi_1(z) = \varphi(z)$, inoltre

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(z) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_\xi\{u_{n+1} = k\} z^k = \sum_{k\geq 0} \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}_\xi\{u_n = k | u_n = j\} \mathbb{P}_\xi\{u_n = j\} z^k \\ &= \sum_{k\geq 0} z^k \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}_\xi\{u_n = j\} \mathbb{P}_\xi \left\{ \sum_{l=0}^{j-1} \xi_{l,n} = k \right\} \\ &= \sum_{j\geq 0} \varphi^j(z) \mathbb{P}_\xi\{u_n = j\} = \varphi_n(\varphi(z)) \,. \end{aligned} \tag{7.69}$$

Iterando, per $0 \leq k \leq n$ si ottiene

$$\varphi_{n+1}(z) = \varphi_{n-k}(\varphi_{k+1}(z)) \,. \tag{7.70}$$

In particolare, per $k = n - 1$,

$$\varphi_{n+1}(z) = \varphi(\varphi_n(z)) \,. \tag{7.71}$$

Esercizio 45 *Dimostrare che se* $u_0 \neq 1 = k_0$, *allora,* $\varphi_0(z) = z^{k_0}$ *e* $\varphi_1(z) = (\varphi(z))^{k_0}$, *e che ciò implica ancora la relazione* $\varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(\varphi(z))$, *ma non* $\varphi_{n+1}(z) = \varphi(\varphi_n(z))$.

Sia ora $\mu := \mathbb{E}(\eta) < \infty$ e $\sigma^2 = Var(\eta) < \infty$.

Osservazione 46 *Siccome* $\varphi(1) = 1$,

$$\mathbb{E}_\xi(u_{n+1}) = \varphi'_{n+1}(1) = \varphi'_n(\varphi(1))\,\varphi'(1) = \varphi'_n(1)\,\varphi'(1)\ . \tag{7.72}$$

Iterando,

$$\varphi'_{n+1}(1) = (\varphi'(1))^n\,\varphi'_1(1) = (\varphi'(1))^{n+1}\ , \tag{7.73}$$

ma $\varphi'(1) = \varphi'_1(1) = \mathbb{E}_\xi(u_1) = \mathbb{E}(\xi_{0,0}) = \mu$. *Pertanto,* $\varphi'_{n+1}(1) = \mu^{n+1}$.

Se $p_0 = 0$, cioè da ogni nodo del grafo si generano sempre nuovi nodi, allora $\mathbb{P}_\xi\{|V(\xi)| < \infty\} = 0$. Se invece $0 < p_0 < 1$, poniamo

$$q_n := \mathbb{P}_\xi\{u_n = 0\} = \varphi_n(0)\ , \tag{7.74}$$

allora

$$q_{n+1} = \varphi_{n+1}(0) = \varphi(\varphi_n(0)) = \varphi(q_n)\ . \tag{7.75}$$

Poiché $p_0 < 1$, $\varphi(s)$, $s := \Re z$, è una serie a termini non-negativi quindi è strettamente crescente in $[0,1]$. Pertanto,

$$\begin{aligned} q_0 &= \varphi_0(0) = 0 \\ q_1 &= \varphi_1(0) = p_0 > 0\,, \\ q_2 &= \varphi_2(0) = \varphi(\varphi_1(0)) = \varphi(q_1) > q_1 \end{aligned} \tag{7.76}$$

quindi, assumendo che $q_n > q_{n-1}$, per la (7.71), $q_{n+1} = \varphi(q_n) > \varphi(q_{n-1}) = q_n$. Allora la successione $\{q_n\}_{n\geq 0}$ è monotona crescente e limitata da 1. Dunque,

$$\exists \lim_{n\to\infty} q_n = \pi = \mathbb{P}_\xi\{T < \infty\} \in (0,1]\,. \tag{7.77}$$

dato che $\varphi(s)$ è continua in $[0,1]$, passando al limite si ottiene $\pi = \varphi(\pi)$, cioè π è una radice dell'equazione

$$\varphi(s) = s\,. \tag{7.78}$$

Inoltre π è la più piccola radice positiva di (7.78), infatti, $\forall s_0 > 0$ radice di (7.78),

$$q_1 = \varphi(0) < \varphi(s_0) = s_0. \tag{7.79}$$

Assumendo $q_n < s_0$, dalla (7.71) si ottiene $q_{n+1} = \varphi(q_n) < \varphi(s_0) = s_0$. Quindi, per induzione $\forall n \geq 0$, $q_n < s_0$ dunque $\pi = \lim_{n\to\infty} q_n \leq s_0$, cioè $\pi = \min\{s > 0 : \varphi(s) = s\}$.

Se si assume anche che $p_0 + p_1 < 1$, allora

$$(0,1] \ni s \longmapsto \varphi''(s) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) p_k s^{k-2} > 0, \tag{7.80}$$

ovvero $\varphi(s)$ è anche una funzione convessa in $(0,1]$. Quindi, poiché $0 < q_1 < 1 = \varphi(1)$, la (7.78) può avere solo 2 soluzioni positive, di cui una è $s = 1$. Notiamo che $\mu = \varphi'(1)$ è anche il coefficiente angolare della tangente al grafico di $\varphi(s)$, per $s \in (0,1]$, nel punto $s = 1$. Allora,

se $\mu > 1$, $0 < \pi < 1$ cioè $\mathbb{P}_\xi\{|V(\xi)| = \infty\} = \mathbb{P}_\xi\{T = \infty\} = 1 - \pi > 0$;

se $\mu \leq 1$, $\pi = 1$ cioè $G(\xi)$ è di taglia finita con probabilità 1.

Per ulteriori approfondimenti sui processi di diramazione si rimanda per esempio a [KT].

Esercizio 47 *Calcolare la probabilità di estinzione π per il processo di diramazione nei casi in cui ξ ha distribuzione di Poisson di parametro c e binomiale di parametri n e p. Dimostrare che, se $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, π, calcolata nel caso binomiale, convege al valore ottenuto in quello poissoniano.*

Bibliografia

[AS] N. Alon & J. H. Spencer *The Probabilistic Method* II edition, John Wiley & sons, inc. (2000).

[B1] Béla Bollobás *Graph Theory* Springer-Verlag (1979).

[B2] Béla Bollobás *Random Graphs* Academic Press (1985).

[G] G. Grimmett *Percolation* II edition Springer-Verlag (1999).

[JŁA] S. Janson, T. Łuczak & A. Rucinski *Random Graphs* John Wiley & sons, inc. (2000).

[KT] S.Karlin & H. M. Taylor *A First Course in Stochastic Processes* II edition Academic Press (1975).

[P] M. Penrose *Random Geometric Graphs* Oxford University Press (2003).

[S] A. N. Shiryaev *Probability* II edition, Springer-Verlag (1989).