Esercizi di Modelli per la biologia

a.a. 2009/2010

1) Supponiamo che ci siano inizialmente nel recinto 2 coppie di conigli fertili e 2 coppie di cuccioli che saranno fertili tra un mese.

Quanti (coppie di) conigli ci saranno tra 6 mesi?

Si tratta di risovere l'equazione di Fibonacci trovando le condizioni iniziali giuste. $F(1) = 4$ ed inoltre, essendoci all'inizio 1 due coppie fertili e due sterili, dopo un mese ce ne sono due fertili (le vecchie) + due sterili (discendenti delle due vecchie) + altre due fertili (le due sterili del mese precedente cresciute nel frattempo), in totale 6. Ora si procede come nel caso visto a lezione. Siccome

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n)\,,$$

la successione è

$$4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, \ldots\,,$$

e quindi la risposta è 68.

2) Risolvere lo stesso esercizio con inizialmente 3 coppie fertili ed una sterile.

3) Lo iodio 131 è usato nella diagnostica o nel trattamento terapeutico dell'ipertiroidismo. Il suo tempo di dimezzamento è di 8 giorni. In quanto tempo la radioattività di una certa quantità di iodio si riduce ad un millesimo?

L'equazione è quella riconducibile al modello di Malthus. Dopo 8 giorni la radioattività è dimezzata, dopo 16 ridotta ad un quarto, dopo 24 giorni ad un ottavo ed in generale dopo $8 \times n$ giorni è ridotta del fattore 2^{n-1}. Poiché $2^{10} = 1024$, possiamo dire, con buona approssimazione, che dopo $8 \times 9 = 72$ giorni la radioattività si è ridotta ad un millesimo.

4) Una colonia di batteri cresce in un'ora del 20%. Di quanto crescerà (se non ci sono limiti alla crescita) in due giorni?

Dopo un'ora la popolazione iniziale dei batteri, B_0, sarà aumentata a

$$B(1) = 1,2\, B_0\,.$$

Dopo n ore la popolazione dei batteri risulta

$$B(n) = (1,2)^n\, B_0\,.$$

Dunque, dopo 48 ore, la popolazione dei batteri sarà

$$2^{48} B_0 \simeq 2,8\ \cdot 10^{14}\,.$$

5) Data l'equazione discreta di Verhulst

$$F(n+1) - F(n) = (0,7 - 0,1F(n))F(n)\,,$$

calcolare la portata del modello e determinare $F(4)$ se $F(1) = 4$.

La portata p si calcola da

$$0,7 - 0,1\, p = 0\,,$$

dunque $p = \frac{0,7}{0,1} = 7$.

Per calcolare i valori $F(n)$ conviene riscrivere l'equazione nella forma

$$F(n+1) = 1,7F(n) - 0,1F(n)^2\,.$$

Ne segue che

$$F(2) = 1,7 \cdot 4 - 0,1 \cdot 16 = 6,8 - 1,6 = 5,2\,,$$

$$F(3) = 1,7 \cdot 5,2 - 0,1 \cdot 5,2^2 = 8,84 - 2,704 = 6,136\,,$$
$$F(4) = 1,7 \cdot 6,136 - 0,1 \cdot 6,136^2 = 10,431 - 3,765 = 6.666\,.$$

Se invece si parte dalla condizione iniziale $F(1) = 8$, si ha che $F(2) = 7,2$, $F(3) = 7,06$ etc.

6) Si consideri l'equazione differenziale di Verhulst

$$x' = (0,8 - 0,2\,x)\,x\,,$$

se ne calcoli la portata, si scriva la soluzione esplicita, si discretizzi con passo $h = 1$ e si confrontino i valori dell'equazione differenziale e quello dell'equazione discretizzata associata per $t = 4$, se $F(0) = 2$.

a) La portata si trova dall'equazione $0,8 - 0,2\,p = 0$, da cui $p = 4$.

b) La soluzione dell'equazione differenziale è

$$x(t) = \frac{4 \cdot 2 \cdot e^{0,8t}}{4 + 2 \cdot (e^{0,8t} - 1)}\,.$$

c) L'equazione discretizzata con passo $h = 1$ è

$$F(n+1) - F(n) = (0,8 - 0,2\,F(n))\,F(n)\,,$$

ovvero

$$F(n+1) = 1,8 \cdot F(n) - 0,2\,F(n)^2$$

d) $F(4)$ si calcola come al solito:

$$F(1) = 1,8 \cdot 2 - 0,2 \cdot 2^2 = 2,8\,; F(2) = 3,472\,; F(3) = 3,836\,; F(4) = 3,962\,.$$

e)

$$x(4) = \frac{4 \cdot 2 \cdot e^{3,2}}{4 + 2 \cdot (e^{3,2} - 1)} \simeq \frac{4 \cdot 2 \cdot 24,53}{4 + 2 \cdot (24,53 - 1)} = \frac{196,26}{51,06} \simeq 3,844\,,$$

un valore più piccolo di $F(4)$.

7) Si consideri l'equazione differenziale di Verhulst

$$x' = (2 - x)\,x\,,$$

se ne calcoli la portata, si scriva la soluzione esplicita per $x(0) = 0,5$ e si discretizzi con passo $h = \frac{1}{2}$, calcolando $F(2)$.

a) La portata si trova dall'equazione $2 - p = 0$, da cui $p = 2$.

b) La soluzione dell'equazione differenziale è

$$x(t) = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot e^{2t}}{2 + 0,5 \cdot (e^{2t} - 1)} .$$

c) L'equazione discretizzata con passo $h = \frac{1}{2}$ è

$$\frac{F(t + \frac{1}{2}) - F(t)}{\frac{1}{2}} = (2 - F(t))F(t) ,$$

ovvero

$$F(t + 0,5) = 2F(t) - 0,5 \cdot F(t)^2 .$$

d) Risulta

$$F(0,5) = 2 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,5^2 .$$

Procedendo come al solito, si trova

$$F(1) = 1,367;\ F(1,5) = 1,8;\ F(2) = 1,98 .$$

8) Si consideri l'equazione differenziale di Verhulst

$$x' = (0,6 - 0,1 \cdot x)\, x ,$$

se ne calcoli la portata, si scriva la soluzione esplicita per $x(0) = 3$ e si calcolino $x(2)$ e $x(4)$.

a) La portata si ricava dall'equazione $0,6 - 0,1 \cdot p = 0$ e dunque $p = 6$.
b) La soluzione è

$$\frac{6 \cdot 3 \cdot e^{0,6t}}{6 + 3 \cdot (e^{0,6t} - 1)} .$$

c) $x(2) \simeq \frac{59,76}{12,96} \simeq 4,611$; $x(4) \simeq \frac{198,4}{36,7} \simeq 5,4$.

9) Si consideri il sistema di equazioni differenziali di Lotka-Volterra

$$x' = x\,(3 - y)$$

$$y' = y\,(-2 + x) .$$

Si determini la soluzione stabile e si calcolino le direzioni in cui si evolve il sistema nei punti $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(2, 4)$ e $(1, 3)$ (che sono i quattro punti che circondano il punto che rappresenta la soluzione stabile).

a) La soluzione stabile si trova dal sistema $3-y = 0$, $-2+x = 0$, e quindi $x = 2$ e $y = 3$.

b) In $(2, 2)$ la "freccia" è determinata dalle componenti $(2, 0)$ e quindi è orizzontale e punta a destra. Nel punto $(3, 3)$ la freccia ha componenti $(0, 3)$, quindi è verticale e punta verso l'alto, nel punto $(2, 4)$ le componenti sono $(-1, 0)$ e la freccia è orizzontale e punta verso sinistra ed infine nel punto $(1, 3)$ la freccia ha componenti $(0, -3)$, quindi la freccia è verticale e punta verso il basso.