# 8 Verifica delle ipotesi

## Contenuto



## 8.1 Introduzione

Come nel capitolo precedente, supponiamo anche qui di disporre di un campione aleatorio proveniente da una distribuzione che ci è nota tranne che per uno o più parametri incogniti. La nuova chiave di lettura non prevede più di stimare direttamente questi parametri, ma piuttosto di utilizzare il campione raccolto per verificare qualche ipotesi che li coinvolga. Per chiarire il concetto, pensiamo ad una impresa edile che acquisti una grossa partita di cavi con una resistenza media alla rottura che è garantita maggiore di 7 000 psi (libbre per pollice quadrato). La ditta potrebbe volere verificare se è vero che questi cavi hanno quella resistenza, e a questo scopo prendere un campione di 10 esemplari e testarli. I dati così ottenuti possono essere utilizzati per stabilire se accettare o meno l'ipotesi del produttore che la resistenza media dei cavi sia almeno pari a 7 000 psi.

Una *ipotesi statistica* è normalmente una affermazione su uno o più parametri della distribuzione di popolazione. Si parla di ipotesi perché a priori non sappiamo se sia vera o meno: il problema primario è quello di sviluppare una procedura per determinare se i valori di un campione aleatorio e l'ipotesi fatta siano compatibili oppure no. Un esempio potrebbe essere una popolazione gaussiana con varianza unitaria e media $\theta$ incognita; l'affermazione "$\theta$ è minore di 1" è una ipotesi statistica che possiamo provare a verificare osservando un campione di questa popolazione. Se esso sarà giudicato compatibile con l'ipotesi considerata, diremo che quest'ultima è "accettata", altrimenti diremo che è "rifiutata".

Si noti che quando accettiamo una ipotesi, non stiamo affermando che sia necessariamente vera, ma solo che i dati raccolti sono accettabilmente in accordo con essa: che non la escludono. Continuando l'esempio della popolazione $\mathcal{N}(\theta, 1)$, se un campione di 10 dati presenta una media campionaria di 1.25, anche se tale risultato non è certo un indizio a favore dell'ipotesi "$\theta < 1$", non è nemmeno incompatibile con questa ipotesi, che quindi dovrebbe essere accettata. D'altra parte, se la media di un campione di 10 dati fosse stata pari a 3, anche se un valore così elevato è possibile anche con $\theta < 1$, diventa talmente improbabile da sembrare incompatibile con l'ipotesi fatta, che verrebbe senz'altro rifiutata.

## 8.2 Livelli di significatività

Consideriamo una popolazione avente distribuzione $F_\theta$ che dipende da un parametro incognito $\theta$, e supponiamo di volere verificare una qualche ipotesi su $\theta$, che chiameremo *ipotesi nulla*, e denoteremo con $H_0$. Se $F_\theta$ è ad esempio una distribuzione normale con media $\theta$ e varianza 1, due possibili ipotesi nulle su $\theta$ sono

1. $H_0 : \theta = 1$
2. $H_0 : \theta \leq 1$

La prima di queste ipotesi afferma che la popolazione ha distribuzione $\mathcal{N}(1, 1)$, mentre la seconda sostiene che essa è normale con varianza 1 e media non superiore a 1. Si noti che l'ipotesi nulla 1, quando è vera, caratterizza completamente la distribuzione della popolazione, mentre questo non è vero per l'ipotesi nulla 2. Nel primo caso si parla allora di ipotesi *semplice*, mentre nel secondo caso si parla di ipotesi *composta*.

Supponiamo di disporre di un campione aleatorio $X_1, X_2, \ldots, X_n$, proveniente da questa popolazione, e di volerlo utilizzare per eseguire una verifica o *test* di una certa ipotesi nulla $H_0$. Siccome dobbiamo decidere se accettare o meno $H_0$ basandoci esclusivamente sugli $n$ valori dei dati, il test sarà definito da una regione $C$ nello spazio a $n$ dimensioni, con l'intesa che se il vettore $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cade all'interno di $C$ l'ipotesi viene rifiutata, mentre viene accettata in caso contrario. Una regione $C$ con queste caratteristiche viene detta *regione critica* del test. Schematizzando quanto detto, il test statistico determinato dalla regione critica $C$ è quello che

$$\text{accetta } H_0 \text{ se } (X_1, X_2, \ldots, X_n) \notin C$$



e

$$\text{rifiuta } H_0 \text{ se } (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C$$

Per anticipare un esempio concreto, una verifica molto comune dell'ipotesi che una popolazione gaussiana di varianza 1 abbia media 1, si ottiene con la regione critica seguente,

$$C = \left\{ (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \left| 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right| > \frac{1.96}{\sqrt{n}} \right\} \tag{8.2.1}$$

Bisogna quindi rifiutare l'ipotesi nulla "$\theta = 1$", quando la media campionaria dista da 1 più di 1.96 diviso per la radice quadrata dell'ampiezza del campione.

È importante notare che in qualunque test per verificare una ipotesi nulla, il risultato può essere sbagliato in due modi differenti. Si ha infatti un *errore di prima specie* quando i dati ci portano a rifiutare una ipotesi $H_0$ che in realtà è corretta, e un *errore di seconda specie* quando finiamo con l'accettare $H_0$ ed essa è falsa. Non vi è simmetria tra i due tipi di errori. Ricordiamo infatti che l'obiettivo di una verifica di $H_0$ non è quello di dire se questa ipotesi sia vera o falsa, ma piuttosto di dire se l'ipotesi fatta sia anche solo compatibile con i dati raccolti. In effetti vi è un ampio livello di tolleranza nell'accettare $H_0$, mentre per rifiutarla occorre che i dati campionari siano molto improbabili quando $H_0$ è soddisfatta.

Questo bilanciamento si ottiene specificando un valore $\alpha$, detto *livello di significatività*, e imponendo che il test abbia la proprietà che quando l'ipotesi $H_0$ è vera, la probabilità che venga rifiutata non possa superare $\alpha$. Il livello di significatività del test viene normalmente fissato in anticipo, con valori tipici dell'ordine di 0.1, 0.05 o 0.005. Detto in altri termini, un test con livello di significatività $\alpha$ deve avere una probabilità di errore di prima specie minore o uguale ad $\alpha$.

Per chiarire un po' come viene costruita la regione critica, immaginiamo di volere verificare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \theta \in w$$

dove con $w$ stiamo indicando un insieme di valori possibili per il parametro. Un approccio naturale per formulare una verifica di $H_0$, ad un livello di significatività $\alpha$ prescritto, consiste nell'individuare uno stimatore puntuale di $\theta$, che denotiamo con $d(\boldsymbol{X})$, e quindi rifiutare l'ipotesi quando $d(\boldsymbol{X})$ è "lontano" dalla regione $w$. Per capire quanto "lontano" deve essere per giustificare un rifiuto di $H_0$ ad un livello di significatività pari ad $\alpha$, occorre conoscere la distribuzione dello stimatore $d(\boldsymbol{X})$ nel caso in cui $H_0$ sia vera. Questo ci permetterebbe infatti di usare il fatto che l'errore di prima specie deve avere probabilità inferiore ad $\alpha$, per capire quando lo stimatore deve considerarsi abbastanza "lontano" da $w$, e quindi per determinare la regione critica del test. Ad esempio la verifica dell'ipotesi che la media di una popolazione $\mathcal{N}(\theta, 1)$ sia pari a 1 (l'Equazione (8.2.1) ne specifica la regione critica), impone di rifiutare l'ipotesi quando lo stimatore puntuale di $\theta$ (ovvero, la media campionaria), dista da 1 (il valore di $\theta$ a cui corrisponde l'ipotesi nulla) più di $1.96/\sqrt{n}$. Come vedremo nella prossima sezione, quest'ultimo valore è stato scelto in modo da dare al test un livello di significatività del 5%.

## 8.3 La verifica di ipotesi sulla media di una popolazione normale

### 8.3.1 Il caso in cui la varianza è nota

Supponiamo che $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sia un campione aleatorio proveniente da una popolazione normale di parametri $\mu$ e $\sigma^2$, con la varianza nota e media incognita. Fissata una costante $\mu_0$, vogliamo verificare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Siccome $\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ è lo stimatore puntuale naturale per $\mu$, sembra ragionevole accettare $H_0$ quando $\overline{X}$ non è troppo lontano da $\mu_0$. Perciò la regione critica del test sarà del tipo

$$C := \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) : |\overline{X} - \mu_0| > c\}$$

per una scelta opportuna della costante $c$.

Se vogliamo che il test abbia livello di significatività $\alpha$, dobbiamo individuare quel valore di $c$ nell'equazione precedente che rende pari ad $\alpha$ la probabilità di errore di prima specie. Ciò significa che $c$ deve soddisfare la relazione seguente,

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{errore di I specie}) \\ &= P_{\mu_0}(|\overline{X} - \mu_0| > c) \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

dove scriviamo $P_{\mu_0}$ per intendere che la probabilità precedente viene calcolata con l'assunzione che $\mu = \mu_0$. Infatti la definizione di errore di prima specie prevede che esso si verifichi quando i dati ci portano a rifiutare $H_0$ (quindi quando $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C$) mentre in realtà essa è vera (quindi nel caso in cui $\mu = \mu_0$).

Quando però $\mu = \mu_0$, sappiamo che $\overline{X}$ ha distribuzione normale con media $\mu_0$ e varianza $\sigma^2/n$, e quindi se $Z$ denota una variabile aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$, allora

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\mu_0}{\sim} Z \tag{8.3.2}$$



dove la relazione $\sim$ è condizionata all'ipotesi $H_0 : \mu = \mu_0$. Possiamo allora riscrivere l'Equazione (8.3.1) nella forma seguente,

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\mu_0}\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= P\left(|Z| > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= 2P\left(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

e quindi $P(Z > c\sqrt{n}/\sigma) = \alpha/2$. Siccome però per definizione di $z_{\frac{\alpha}{2}}$ vale,

$$P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

si deduce che

$$\frac{c\sqrt{n}}{\sigma} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

e quindi che

$$c = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{8.3.3}$$

Il test con livello di significatività $\alpha$ dovrà allora rifiutare $H_0$ se $|\overline{X} - \mu_0| > z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}$, ovvero

$$\begin{aligned} &\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \\ &\text{si accetta } H_0 \text{ se } \left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

La regione di accettazione per la statistica del test[1] è un intervallo simmetrico rispetto allo zero, come è illustrato in Figura 8.1, dove si è riportata in sovrapposizione la densità della distribuzione normale standard (che è la densità della statistica del test quando $H_0$ è vera).

**Esempio 8.3.1.** Un segnale di valore $\mu$ trasmesso da una sorgente A, viene raccolto dal ricevente B con un rumore normale di media nulla e varianza 4; il segnale ricevuto da B ha quindi distribuzione $\mathcal{N}(\mu, 4)$. Per ridurre il rumore, viene inviato per 5 volte lo stesso segnale: la media campionaria dei segnali ricevuti è $\overline{X} = 9.5$. Si sa infine che $B$ aveva motivo di supporre che il valore inviato dovesse essere 8. Si verifichi questa ipotesi.

[1] Ogni verifica di ipotesi si basa fondamentalmente su una statistica particolare. In questo caso si intende la variabile aleatoria $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)/\sigma$.

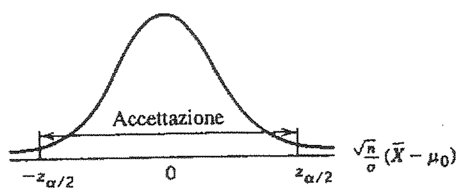


**Figura 8.1** Densità della statistica del test e regione di accettazione.

Verifichiamo l'ipotesi ad un livello di significatività del 5%. Per prima cosa calcoliamo la statistica del test,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 1.5 \approx 1.68$$

Siccome questo valore è minore di $z_{0.025} \approx 1.96$, l'ipotesi va accettata. I dati non sono incompatibili con l'ipotesi fatta, nel senso che, se fosse $\mu = 8$, la media campionaria verrebbe osservata ad una distanza altrettanto grande (più distante di 1.5 da 8) più del 5% delle volte. Si noti comunque che, con un livello di significatività meno stringente, ad esempio $\alpha = 0.1$, l'ipotesi nulla sarebbe stata rifiutata. Questo perché $z_{0.05} = 1.645$ è inferiore a 1.68. Quindi se avessimo chiesto una verifica che avesse il 10% di probabilità di rifiutare $H_0$ quando essa è vera, avremmo effettivamente ottenuto un rifiuto.

Il livello di significatività "corretto" da usare nelle varie situazioni dipende di volta in volta dalle circostanze ed è influenzato da diversi fattori. Ad esempio se la decisione di rifiutare l'ipotesi $H_0$ portasse ad un costo elevato, che risulterebbe quindi perduto se $H_0$ fosse in realtà valida, potremmo forse decidere di essere abbastanza cauti, scegliendo un livello di significatività di 0.05 o 0.01. O ancora, se ci sentissimo a priori molto convinti della correttezza di $H_0$, potremmo richiedere una forte evidenza sperimentale contraria, per rifiutare questa ipotesi, scegliendo di nuovo un valore di $\alpha$ molto basso. □

La regola fornita dall'Equazione (8.3.4) può essere riformulata come segue. Dopo avere calcolato il valore assunto dalla statistica del test, $\sqrt{n}|\overline{X} - \mu_0|/\sigma$, che denotiamo con $v$, valutiamo la probabilità (condizionata alla validità di $H_0$) che la statistica stessa assumesse un valore come $v$ o più estremo ancora. Se tale probabilità è minore del livello di $\alpha$, rifiutiamo l'ipotesi $H_0$, altrimenti la accettiamo. In altri termini dobbiamo calcolare prima il valore della statistica del test, poi la probabilità che una normale standard, in valore assoluto, superi tale quantità. Questa probabilità, detta il $p$-dei-dati del test, fornisce il livello di significatività critico, scendendo al di sotto del quale la decisione cambia da rifiuto ad accettazione.



In pratica spesso non si fissa in anticipo il livello di significatività, ma si osservan i dati e si ricava il $p$-dei-dati corrispondente. Se esso risulta molto maggiore di quant siamo disposti ad accettare come probabilità di un errore di prima specie, convien accettare l'ipotesi nulla; se invece esso è molto piccolo, possiamo rifiutarla.

**Esempio 8.3.2.** Con riferimento all'Esempio 8.3.1, supponiamo che la medi campionaria dei 5 segnali ricevuti fosse 8.5. In quel caso

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 0.5 \approx 0.559$$

Siccome

$$P(|Z| > 0.559) = 2P(Z > 0.559)$$
$$\approx 2 \times 0.288 = 0.576$$

si ha che il $p$-dei-dati è 0.576 e quindi l'ipotesi nulla che il segnale inviato fosse 8 viene accettata per ogni $\alpha < 0.576$. Poiché sarebbe assurdo eseguire un test con u livello di significatività elevato come 0.576, è senz'altro opportuno accettare $H_0$.

D'altra parte, se avessimo ottenuto che $\overline{X} = 11.5$, il corrispondente valore de $p$-dei-dati sarebbe stato

$$P\left(|Z| > \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot 3.5\right) \approx 2P(Z > 0.3913)$$
$$\approx 0.00005$$

e con un valore così piccolo, l'ipotesi che il messaggio fosse stato 8, va rifiutata. □

Non abbiamo ancora discusso la probabilità degli errori di seconda specie – cioè la probabilità di accettare $H_0$ quando in realtà essa non è valida. Tale probabilità dipende da $\mu$, e in particolare vale:

$$\beta(\mu) := P_\mu(\text{accettare } H_0)$$
$$= P_\mu\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$
$$= P_\mu\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

La funzione $\beta(\mu)$ è detta curva OC (che sta per *curva operativa caratteristica*, c più propriamente per il suo equivalente inglese, *operating characteristic curve*), e rappresenta la probabilità di accettare $H_0$ quando la media reale è $\mu$.

Per calcolare questa probabilità, usiamo il fatto che $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ e quindi

$$Z := \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

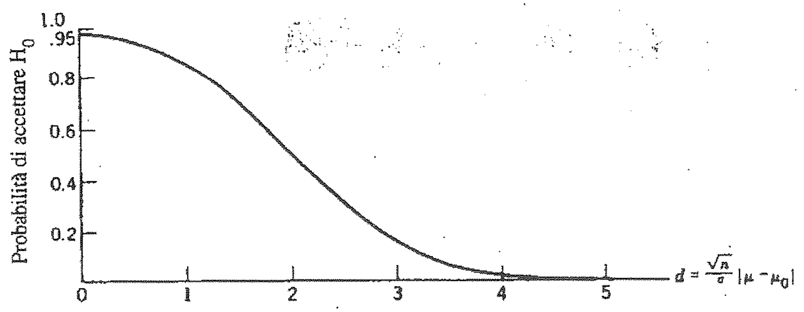


**Figura 8.2** Curva OC di un test bilaterale per la media di una popolazione normale, con $\alpha = 0.05$.

Da cui

$$\begin{aligned}
\beta(\mu) &= P_\mu\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= P_\mu\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= P_\mu\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \qquad (8.3.5)
\end{aligned}$$

dove $\Phi$ indica la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard.

Per un livello di significatività $\alpha$ fissato, la curva OC è simmetrica rispetto a $\mu_0$, e in effetti dipende da $\mu$ solo tramite $\sqrt{n}|\mu - \mu_0|/\sigma$. In Figura 8.2 è rappresentata la curva OC per $\alpha = 0.05$, con l'ascissa trasformata da $\mu$ a $d := \sqrt{n}|\mu - \mu_0|/\sigma$.

**Esempio 8.3.3.** Con riferimento all'Esempio 8.3.1, quanto vale la probabilità di accettare $\mu = 8$, quando in realtà $\mu = 10$? Calcoliamo

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) = \frac{\sqrt{5}}{2}(-2) = -\sqrt{5}$$

Poiché $z_{0.025} \approx 1.96$, sostituendo nell'Equazione (8.3.5) ricaviamo la probabilità cercata,

$$\begin{aligned}
\beta(10) &\approx \Phi(-\sqrt{5} + 1.96) - \Phi(-\sqrt{5} - 1.96) \\
&\approx \Phi(-0.276) - \Phi(-4.196) \\
&= 1 - \Phi(0.276) - 1 + \Phi(4.196) \\
&\approx -0.609 + 1 = 0.391 \quad \square
\end{aligned}$$



**Osservazione 8.3.1.** La funzione $1 - \beta(\mu)$ viene detta *funzione di potenza* del test. Per un valore di $\mu$ fissato, la potenza del test è la probabilità di rifiutare (correttamente) $H_0$ quando $\mu$ è il valore vero.

La curva OC permette di dimensionare il campione in modo che l'errore di seconda specie soddisfi delle condizioni specifiche. Supponiamo ad esempio, di cercare il valore di $n$ con il quale la probabilità di accettare $H_0 : \mu = \mu_0$ quando il valore vero è $\mu_1$, sia approssivamente pari a un valore $\beta$ fissato. Vogliamo insomma $n$ tale che

$$\beta(\mu_1) \approx \beta$$

Per l'Equazione (8.3.5), questo è equivalente a chiedere che

$$\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \approx \beta \qquad (8.3.6)$$

Anche se l'equazione precedente non può essere risolta analiticamente in funzione di $n$, si può arrivare ad una soluzione usando i tabulati di $\Phi$. Inoltre, un valore molto approssimato per $n$ si può ricavare dall'Equazione (8.3.6), nel modo seguente. Supponiamo che $\mu_1 > \mu_0$ (il viceversa è analogo e viene lasciato come esercizio). Ciò significa che la seconda $\Phi(\cdot)$ che compare nella (8.3.6) vale certamente meno di $\alpha/2$, e quindi in molti casi può essere trascurata, infatti:

$$\mu_1 > \mu_0 \Leftrightarrow \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}} < -z_{\frac{\alpha}{2}}$$

da cui, visto che $\Phi$ è monotona crescente,

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right) &\le \Phi(-z_{\frac{\alpha}{2}}) \\
&= P(Z \le -z_{\frac{\alpha}{2}}) \\
&= P(Z \ge z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Per cui si può considerare trascurabile il termine

$$\Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 0$$

ottenendo quindi dall'Equazione (8.3.6) che

$$\beta \approx \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Quest'ultima equazione è finalmente risolvibile rispetto a $n$, visto che

$$\beta = P(Z > z_\beta) = P(Z < -z_\beta) = \Phi(-z_\beta)$$

e quindi possiamo uguagliare

$$\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{\frac{\alpha}{2}} \approx -z_\beta$$

ricavando

$$n \approx \left[\frac{(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta)\sigma}{\mu_1 - \mu_0}\right]^2 \tag{8.3.7}$$

È bene notare che anche nel caso in cui $\mu_1 < \mu_0$, si perviene esattamente alla stessa formula.

**Esempio 8.3.4.** Con riferimento all'Esempio 8.3.1, quante volte è necessario inviare il segnale affinché la verifica dell'ipotesi $H_0 : \mu = 8$ ad un livello di significatività di 0.05, abbia almeno il 75% di probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando $\mu = 9.2$?

Siccome $z_{0.025} \approx 1.96$ e $z_{0.25} \approx 0.67$, per l'approssimazione descritta qui sopra,

$$n \approx \left(\frac{1.96 + 0.67}{1.2}\right)^2 4 \approx 19.21$$

Per cui è necessario un campione di 20 segnali. Dall'Equazione (8.3.5) vediamo che con $n = 20$,

$$\begin{aligned}\beta(9.2) &\approx \Phi\left(-\frac{1.2\sqrt{20}}{2} + 1.96\right) - \Phi\left(-\frac{1.2\sqrt{20}}{2} - 1.96\right)\\ &\approx \Phi(-0.723) - \Phi(-4.643)\\ &\approx 1 - \Phi(0.723) \approx 0.235\end{aligned}$$

Perciò se il segnale viene trasmesso 20 volte vi è il 76.5% di probabilità che l'ipotesi nulla $\mu = 8$ sia rifiutata se la media reale è 9.2. □

#### 8.3.1.1 I test unilaterali

Nel verificare l'ipotesi nulla $\mu = \mu_0$ abbiamo costruito un test che porta ad un rifiuto quando $\overline{X}$ è lontana da $\mu_0$, ovvero, valori di $\overline{X}$ troppo bassi o troppo elevati rispetto a $\mu_0$ sembrano smentire che $\mu$ (stimata da $\overline{X}$) sia proprio uguale a $\mu_0$. Cosa accade invece quando $\mu$ può essere solo maggiore a $\mu_0$, quando non sono uguali? Ovvero cosa occorre fare se l'ipotesi alternativa a $H_0 : \mu = \mu_0$, è $H_1 : \mu > \mu_0$? Chiaramente quando il contesto è questo, valori molto bassi di $\overline{X}$ non ci dovrebbero fare rifiutare l'ipotesi nulla (visto che è più probabile ottenere una $\overline{X}$ piccola quando è vera $H_0$ che non quando è vera $H_1$). Perciò, nel verificare l'ipotesi

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{contro} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$



dovremmo rifiutare l'ipotesi nulla quando $\overline{X}$, lo stimatore di $\mu$, è molto più grande d $\mu_0$, e quindi la regione critica dovrebbe essere del tipo seguente:

$$C := \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \overline{X} - \mu_0 > c\}$$

per una scelta opportuna della costante $c$. In particolare, siccome la probabilità d rifiuto dovrebbe essere $\alpha$ quando $H_0$ è vera (cioè quando $\mu = \mu_0$), occorre che soddisfi la relazione,

$$P_{\mu_0}(\overline{X} - \mu_0 > c) = \alpha \tag{8.3.8}$$

Di nuovo, poiché stiamo supponendo che $\mu = \mu_0$, $\overline{X}$ ha media $\mu_0$, e quindi la statistica $Z$ definita qui sotto ha distribuzione normale standard,

$$Z := \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Perciò la (8.3.8) è equivalente a

$$P\left(Z > \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \alpha$$

che si risolve in funzione di $c$ ricordando che $P(Z > z_\alpha) = \alpha$, ottenendo quindi che

$$c = z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{8.3.9}$$

Il test con livello di significatività $\alpha$ dovrà allora rifiutare $H_0$ se $\overline{X} - \mu_0 > z_\alpha \cdot \sigma/\sqrt{n}$, ovvero

$$\begin{aligned}&\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\\ &\text{si accetta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_\alpha\end{aligned} \tag{8.3.10}$$

Quella trovata è detta regione critica *unilaterale*, o *a una coda* (a differenza delle regioni critiche trovate nella sezione precedente che erano *bilaterali* o *a due code*). In accordo con quanto detto, anche il problema di verificare le ipotesi alternative

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

si dice problema di test unilaterale.

Per ottenere il *p*-dei-dati di questo tipo di test, si calcola innanzitutto il valore della statistica del test,

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

in funzione dei dati raccolti; il *p*-dei-dati è quindi uguale alla probabilità che una normale standard superi questo valore.

**Esempio 8.3.5.** Supponiamo, nell'Esempio 8.3.1, di sapere in anticipo che il segnale inviato non è inferiore a 8. Cosa possiamo concludere in questo caso?

Per vedere se i dati siano compatibili con l'ipotesi che la media sia 8, verifichiamo

$$H_0 : \mu = 8$$

contro l'alternativa a una coda

$$H_1 : \mu > 8$$

Il valore della statistica del test è di

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{5}(9.5 - 8)/2 \approx 1.68$$

quindi il $p$-dei-dati è la probabilità che una normale standard superi 1.68, ovvero

$$p\text{-dei-dati} = 1 - \Phi(1.68) \approx 0.0465$$

Siccome la verifica impone un rifiuto a tutti i livelli di significatività maggiori o uguali a 0.0465, l'ipotesi nulla sarebbe rifiutata se si ponesse ad esempio $\alpha = 0.05$. □

La curva OC del test unilaterale (8.3.10) si può ricavare come segue. Visto che per $i = 1, 2, \ldots, n$, si ha che $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, e quindi che $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$, se poniamo $Z := \sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma$, questa statistica è normale standard, per cui

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &:= P_\mu(\text{accettare } H_0)\\ &= P_\mu\left(\overline{X} \le \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\ &= P_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right)\\ &= P_\mu\left(Z \le \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right)\\ &= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right)\end{aligned} \tag{8.3.11}$$

Siccome $\Phi$, in quanto funzione di ripartizione, è crescente, è chiaro che $\beta(\mu)$ è una funzione decrescente. Questo risultato appare incoraggiante, visto che è ragionevole che, al crescere di $\mu$, sia sempre meno facile concludere che $\mu < \mu_0$. Si noti anche che, siccome $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$, si ha che

$$\beta(\mu_0) = 1 - \alpha$$



La regola fornita dalla (8.3.10), che abbiamo utilizzato per verificare l'ipotesi $H_0 : \mu = \mu_0$ contro l'ipotesi $H_1 : \mu > \mu_0$, vale anche per verificare, ad un livello di significatività $\alpha$, l'ipotesi unilaterale

$$H_0 : \mu \le \mu_0$$

contro l'alternativa

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Per accertarci che il livello di significatività sia rimasto $\alpha$, dobbiamo dimostrare che la probabilità di un errore di prima specie non superi mai questo valore. Al variare di $\mu$, la probabilità di rifiuto è data da $1 - \beta(\mu)$. Siccome si commette un errore di prima specie se $H_0$ è vera e i dati ci impongono di rifiutarla, dobbiamo verificare che, per ogni $\mu$ compatibile con $H_0$, quindi per ogni $\mu \le \mu_0$,

$$1 - \beta(\mu) \le \alpha, \qquad \text{per ogni } \mu \le \mu_0$$

ovvero che

$$\beta(\mu) \ge 1 - \alpha, \qquad \text{per ogni } \mu \le \mu_0$$

Ma avendo già dimostrato che $\beta(\mu)$ è una funzione decrescente, che vale proprio $1 - \alpha$ quando $\mu = \mu_0$, è chiaro che per valori di $\mu$ più piccoli, il valore di $\beta(\mu)$ sarà superiore a $1 - \alpha$ come richiesto.

**Osservazione 8.3.2.** È anche possibile verificare l'ipotesi

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

ad un livello di significatività $\alpha$, decidendo che

$$\begin{aligned}&\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\\ &\text{si accetta } H_0 \text{ se } \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -z_\alpha\end{aligned} \tag{8.3.12}$$

Anche questo test può essere in alternativa effettuato calcolando la statistica $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)/\sigma$ in funzione dei dati, poi trovando il $p$-dei-dati che è la probabilità che una normale standard sia inferiore a quel valore, e concludendo che a qualunque livello di significatività $\alpha$, maggiore o uguale al $p$-dei-dati, il test impone di rifiutare l'ipotesi nulla.

**Esempio 8.3.6.** Tutti i tipi di sigarette attualmente presenti sul mercato hanno un contenuto medio di nicotina non inferiore a 1.6 mg. Una marca di tabacchi afferma però di avere individuato un particolare trattamento delle foglie di tabacco che permette di abbassare il livello medio di nicotina al di sotto di 1.6 mg. Per verificare questa affermazione, si analizza un campione di 20 sigarette di questa marca, trovando una media campionaria del contenuto di nicotina di 1.54 mg. Supponendo che la deviazione standard della popolazione sia[2] di 0.8 mg e fissando il livello di significatività al 5%, cosa decide il test?

Nel risolvere questo esercizio, il primo passo consiste nell'individuare quale sia l'ipotesi nulla appropriata. Si tenga presente infatti che non vi è simmetria (nemmeno nel caso unilaterale!) tra ipotesi nulla e alternativa, nel senso che passando da

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{contro} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

a

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad \text{contro} \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

non è affatto detto che se uno dei due test accetta $H_0$, l'altro la rifiuti. Come mai? Si ricordi che $\alpha$ per definizione non è mai inferiore alla probabilità di rifiutare $H_0$ quando essa è vera; per questo se il test decide di rifiutare $H_0$, si è certi che la probabilità di errore non supera $\alpha$ (che è un valore piccolo e per di più fissato a priori), quindi il rifiutare l'ipotesi nulla è una affermazione "forte", nel senso che abbiamo un eccellente controllo sulla probabilità di sbagliare. Non è invece possibile accettare l'ipotesi $H_0$ con lo stesso livello di controllo: la probabilità di errore è incerta, essendo pari a $\beta(\mu)$ che dipende da $\mu$, e può essere anche un valore molto elevato (fino a $1 - \alpha$, come abbiamo visto).

*Se si accetta l'ipotesi nulla, significa che non vi è evidenza sperimentale sufficiente ad escluderla: non significa che i dati la avvalorino con decisione.*

Ciò premesso, siccome vogliamo avvalorare l'affermazione del produttore solo in presenza di una chiara evidenza sperimentale in questa direzione, dobbiamo prendere tale affermazione come ipotesi alternativa, e perciò dobbiamo verificare

$$H_0 : \mu \geq 1.6 \qquad \text{contro} \qquad H_1 : \mu < 1.6$$

[2] Quanto proposto solleva la questione di come si possa affermare di conoscere la deviazione standard di un *nuovo* tipo di sigarette. Una possibile giustificazione si avrebbe se la variabilità del contenuto di nicotina non fosse alterata dal trattamento usato sulle foglie, ma dipendesse solo dal contenuto di tabacco di ogni sigaretta. Se così fosse, si potrebbe affermare che la deviazione standard deve essere la stessa degli altri tipi di sigarette, e potrebbe quindi essere nota dall'esperienza passata. In ogni caso, anche i casi in cui la varianza di popolazione non sia nota si possono affrontare con successo, come è descritto nella sezione successiva.



Il valore della statistica del test è di

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1.54 - 1.6}{0.8/\sqrt{20}} \approx -0.335$$

Così che il $p$-dei-dati è dato da

$$p\text{-dei-dati} \approx P(Z < -0.335) = \Phi(-0.335) \approx 0.369$$

dove $Z$ ha distribuzione normale standard. Siccome il risultato ottenuto è maggiore d 0.05 (e in effetti è maggiore di qualunque livello di significatività sensato), non si pu rifiutare l'ipotesi nulla. In altri termini, il dato in nostro possesso, anche se avvalor la tesi del produttore, non è abbastanza forte da farci escludere che il contenuto medi di nicotina di quel tipo di sigarette sia maggiore o uguale a 1.6 mg. □

**Osservazione 8.3.3.** Vi è una evidente analogia tra la stima di parametri con gli in tervalli di confidenza e la verifica delle ipotesi. Ad esempio abbiamo dimostrato nell Sezione 7.3 (con l'Equazione (7.3.8) di pagina 242), che un intervallo di confidenz bilaterale ad un livello di $1 - \alpha$ per la media di una distribuzione normale di varianz nota $\sigma^2$, è dato da

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

dove $\bar{x}$ era il valore della media campionaria. In maniera più rigorosa, ciò signific che

$$P\left\{\mu \in \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right\} = 1 - \alpha$$

Nel compiere una verifica sulle ipotesi bilaterali $H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_1 : \mu \neq \mu$ ad un livello di significatività di $\alpha$, quello che facciamo è di accettare l'ipotesi null quando

$$\mu_0 \in \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

e se $\mu = \mu_0$, questo evento è lo stesso di prima, e infatti la sua probabilità sotto $P_\mu$ è ancora di $1 - \alpha$.

Similmente, siccome un intervallo di confidenza unilaterale destro per $\mu$ è dat da

$$\left(\overline{X} - z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \infty\right)$$

ne segue che un test con livello di significatività $\alpha$ per le ipotesi $H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$ si ottiene accettando l'ipotesi nulla quando $\mu_0 \in (\overline{X} - z_\alpha \cdot \sigma/\sqrt{n}, \infty$ in accordo con quanto dimostrato in questa sezione.

La Tabella 8.1 riassume i test di questa sezione.

**Sulla robustezza di un test**

Un test che si comporta bene anche quando alcune delle assunzioni su cui si basa non sono valide si dice *robusto*. Per esempio i test introdotti nelle Sezioni 8.3.1 e 8.3.1.1 sono stati ottenuti assumendo che la distribuzione della popolazione fosse normale, con varianza nota $\sigma^2$; tuttavia, anche se essa è una qualunque altra distribuzione con varianza $\sigma^2$, la media campionaria $\overline{X}$ è comunque *approssimativamente* normale (purché il campione sia numeroso), per il teorema del limite centrale, e quindi i risultati trovati saranno approssimativamente corretti (mostrando così la robustezza di quei test).

**Tabella 8.1** $X_1, X_2, \dots, X_n$ è un campione estratto da una popolazione $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

| $\sigma^2$ nota | | $\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $H_0$ | $H_1$ | **Statistica del test, $X_{ts}$** | **Si rifiuta $H_0$ con livello di significatività $\alpha$ se...** | ***p*-dei-dati se $X_{ts} = t$** |
| $\mu = \mu_0$ | $\mu \neq \mu_0$ | $\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ | $\dots \lvert X_{ts}\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$ | $2P(Z > \lvert t\rvert)$ |
| $\mu \leq \mu_0$ | $\mu > \mu_0$ | $\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ | $\dots X_{ts} > z_\alpha$ | $P(Z > t)$ |
| $\mu \geq \mu_0$ | $\mu < \mu_0$ | $\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ | $\dots X_{ts} < -z_\alpha$ | $P(Z < t)$ |

Nota: $Z$ ha distribuzione normale standard.

### 8.3.2 Quando la varianza non è nota: il test $t$

Fino ad ora abbiamo supposto che l'unico parametro incognito della distribuzione di popolazione fosse la media. Più comunemente però, né la media $\mu$, né la varianza $\sigma^2$ sono note. Supponiamo di essere in tale situazione e consideriamo di nuovo come si possa verificare l'ipotesi nulla che $\mu$ sia uguale ad un valore assegnato $\mu_0$, contro l'ipotesi alternativa $\mu \neq \mu_0$,

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0 .$$

È bene notare che l'ipotesi nulla non è semplice (nel senso della definizione data a pagina 286, ovvero che supporre vera $H_0$ non specifica completamente la distribuzione), perché non fornisce il valore di $\sigma^2$.



Come in precedenza, sembra ragionevole rifiutare l'ipotesi nulla quando $\overline{X}$ cade lontano da $\mu_0$; tuttavia la distanza a cui deve essere da $\mu_0$ per giustificare questo rifiuto, dipende dalla deviazione standard $\sigma$ che in quella sede era nota; in particolare $|\overline{X} - \mu_0|$ doveva essere maggiore di $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}$, o equivalentemente,

$$\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Qui $\sigma$ non è più conosciuta. Possiamo allora pensare di sostituirla con il suo stimatore, la deviazione standard campionaria $S$

$$S := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \tag{8.3.13}$$

rifiutando l'ipotesi nulla quando

$$\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|$$

è troppo grande.

Quanto grande è "troppo grande"? Affinché il test alla fine abbia livello di significatività pari ad $\alpha$, dobbiamo conoscere la distribuzione della statistica del test quando $H_0$ è vera, e imporre che la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla sia (non più grande di) $\alpha$. Sappiamo (per il Corollario 6.5.2 di pagina 221), che la variabile aleatoria

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \tag{8.3.14}$$

ha distribuzione $t$. Se si denota con $T$ la statistica di questo test, ovvero

$$T := \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{8.3.15}$$

allora quando $H_0$ è vera, visto che $\mu = \mu_0$, $T$ ha distribuzione $t$ con $n-1$ gradi di libertà. Imponiamo ora che la probabilità di errore di prima specie sia $\alpha$, ovvero passando agli eventi complementari, che sia $1-\alpha$ la probabilità di accettare l'ipotesi nulla quando $\mu = \mu_0$:

$$P_{\mu_0}\left(-c \leq \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq c\right) = 1 - \alpha$$

Per ricavare $c$, si noti che, siccome la densità della distribuzione $t$ è simmetrica rispetto allo zero,

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - P(-c < T < c) \\ &= P(T \leq -c) + P(T \geq c) \\ &= 2P(T \geq c) \end{aligned}$$

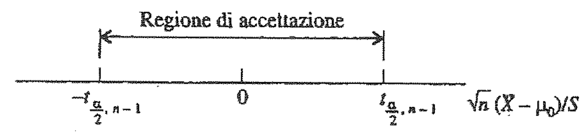


**Figura 8.3** Il test $t$ bilaterale.

Per cui $P(T > c) = \frac{\alpha}{2}$ e quindi deve valere $c = t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ per definizione di $t_{\alpha,k}$. Concludendo, diamo la regola per usare il test:

$$\text{si rifiuta } H_0 \text{ se } \left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$
$$\text{si accetta } H_0 \text{ se } \left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \le t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \qquad (8.3.16)$$

Il test descritto qui sopra è detto *test t* bilaterale, ed è illustrato in Figura 8.3.

Se si denota con $t$ il valore assunto da $T$ – la statistica del test – calcolata in funzione dei dati del campione, il valore del $p$-dei-dati corrispondente è la probabilità che $|T|$ superi $|t|$, quando $H_0$ è vera. Si tratta quindi della probabilità che una $t$ di Student con $n-1$ gradi di libertà abbia valore assoluto maggiore di $|t|$. Come nei casi precedenti, si deve rifiutare l'ipotesi nulla a tutti i livelli di significatività maggiori del $p$-dei-dati, mentre la si accetta a tutti i livelli inferiori.

Il Programma 8.3.2 del software abbinato a questo libro, calcola il valore della statistica del test $t$ e del $p$-dei-dati corrispondente; può essere usato sia per i test $t$ a due code, sia per quelli ad una coda. Questi ultimi saranno presentati brevemente dopo i due esempi seguenti.

**Esempio 8.3.7.** Tra quei pazienti di una clinica che hanno un livello di colesterolo da medio a elevato (al di sopra di 220 millilitri per decilitro di siero), vengono cercati dei volontari per sperimentare un nuovo farmaco che dovrebbe aiutare a ridurre il tasso di colesterolo. Si sceglie un gruppo di 50 volontari a cui viene somministrato il farmaco per un mese, alla fine si registra la variazione nel tasso di colesterolo e si trova una riduzione media di 14.8, con una deviazione standard campionaria di 6.4. Che conclusioni si possono trarre?

Verifichiamo se è possibile che tale diminuzione sia dovuta esclusivamente ad un caso fortuito – testiamo quindi l'ipotesi che le 50 variazioni siano normali con media nulla. Poiché il valore della statistica del test $t$, calcolata con $\mu_0 = 0$ è

$$T = \sqrt{n}\cdot\overline{X}/S = \sqrt{50}\cdot 14.8/6.4 \approx 16.35$$

è chiaro che dobbiamo rifiutare l'ipotesi nulla che avevamo fatto. □



**Test clinici ed effetto placebo**

Nell'Esempio 8.3.7 si è determinato che la diminuzione di colesterolo riscontrata non poteva essere casuale; tuttavia non si è comunque giustificati a concludere che il merito sia stato del farmaco. In effetti è ben noto che la somministrazione di una qualunque sostanza che il paziente pensa che possa avere un effetto benefico, tende a migliorarne le condizioni anche se non dovrebbe avere nessun effetto fisiologico (è il cosiddetto *effetto placebo*). Inoltre vi è la possibilità che agenti esterni come le condizioni meteorologiche possano influire sull'esperimento.

In effetti, un esperimento congegnato con intelligenza dovrebbe cercare di neutralizzare tutte le cause esterne, per ottenere una chiara indicazione sull'efficacia del farmaco. L'approccio a cui si ricorre comunenente consiste nel dividere i volontari in due gruppi, somministrando ad uno il farmaco vero, e all'altro un placebo (ovvero una sostanza con lo stesso aspetto e sapore del farmaco, che però non ha alcun effetto fisiologico), senza comunicare a nessuno come sono formati i gruppi, e possibilmente tenendo anche i medici che sono a contatto con i volontari all'oscuro, per evitare che con il loro atteggiamento provochino qualche effetto. Se i volontari sono suddivisi in modo casuale possiamo aspettarci che in media tutti gli altri fattori che influiscono sui due gruppi siano gli stessi, e quindi che ogni differenza riscontrata sia da attribuirsi al farmaco.

**Esempio 8.3.8.** Si vuole verificare l'ipotesi che il consumo medio di acqua per abitazione sia di 350 galloni al giorno. Si misurano i consumi medi di un campione di 20 abitazioni, trovando i seguenti dati

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 340 | 356 | 332 | 362 | 318 | 344 | 386 | 402 | 322 | 360 |
| 362 | 354 | 340 | 372 | 338 | 375 | 364 | 355 | 324 | 370 |

Cosa si conclude?

Dobbiamo verificare le due ipotesi seguenti

$$H_0 : \mu = 350 \qquad \text{contro} \qquad H_1 : \mu \neq 350$$

Ciò può essere ottenuto usando il Programma 8.3.2 o, in alternativa, calcolando prima la media e la deviazione standard campionarie dei dati, che sono

$$\overline{X} = 353.8 \qquad S \approx 21.85$$

trovando quindi il valore della statistica del test,

$$T \approx \frac{\sqrt{20}\cdot 3.8}{21.85} \approx 0.778$$