Esame di Matematica e Statistica applicate alla Biologia
appello del 04/02/2010

la discussione degli elaborati e la registrazione dei voti avverranno
in data 09/02 c.a. alle ore 12:00 presso l'ufficio del Prof. Volcic

Graziadio		Lucia		138133	21/30
Scafone		Teresa		138004	27/30
Valentina		Cacozza		138006	27/30
De Rango		Anna		138054	28/30
Guardia		Antonello		138008	26/30
Gerbasi		Francesca		138045	28/30
Raschellà		Francesca		138159	19/30
Gerace		Giulia		138132	27/30
Bresci		Samuela		138135	27/30
Angotti		Maria	Francesca	138093	15/30
Bellisario		Laura		138029	24/30
Lanzillotta		Donatella		138680	20/30
Silvaggio		Graziella		137997	15/30
Fazzari		Gilda		138030	22/30
Falsetta		Francesca		138210	12/30
Mollo		Simona		138147	21/30
Ledonne		Claudia		138105	14/30
Corrente	Naso	Samuele		138034	28/30
Iannì		Maria		138112	27/30
Veneziano		Claudia		137978	30/30 lode
Grimoli		Valeria		138066	28/30
Coscarelli		Francesca		138056	28/30
Cortese		Francesca		137975	25/30
Garofalo		Vincenzo		137996	15/30
Cavaliere	Sgroi	Carla		138002	18/30
Lavitola		Antonella		138209	25/30
Augello		Maria	Celeste	138031	30/30
Barile		Filomena			26/30
Fisico		Annarita		138095	25/30
Magno		Paola		138177	27/30
Logiacco		Caterina		138161	14/30
Sabatino		Marina		138044	26/30
Ventura		Tiziana		138098	15/30
Mosciaro		Lucia		138064	23/30

Forgione	Ivano		138343	27/30
Santoro	Melania		138149	24/30
Facchinetti	Caterina		138067	27/30
Rossi	Roberta		138062	25/30
Mirante	Teresa		138027	30/30 lode
Grisolia	Maria		138051	27/30
D'Alessandro	Gabriella		138042	10/30
Palmieri	Lucia		138162	27/30
Lo Muto	Loredana		138090	0/30
Moraca	Francesca		138022	27/30
Pugliese	Chiara		138053	30/30 lode
De Lorenzo	Maria	Grazia	138033	27/30
Cristiani	Costanza	Maria	138012	30/30 lode
Cacciatore	Francesco		138024	27/30
Albanese	Leticia	Maria	138023	26/30
Scriva	Andrea		138052	26/30
Bombardiere	Valentina		137982	28/30
Benincasa	Francesco		138092	21/30
Mazzulla	Emanuela		138069	20/30
Grimaldi	Donatella		138028	30/30 lode
De Mari	Elisa	Maria	137999	15/30
Bello	Innocenzo		138094	27/30
Lento	Roberta		138063	26/30
Barbanera	Maria	Grazia	138109	26/30
Falcone	Fiammetta		138136	27/30
Stumpo	Giuseppina		138001	10/30

Esercizi di Matematica e Statistica applicate alla Biologia

a.a.2009/2010
04/02/2010

Cognome...**Nome**............................
matricola...

1. Sia $\mathcal{C}_{30}(X)$, rappresentato dalla tabella di dati riportata qui di seguito,

32	34	36	40	42	44	46	48	52	54
56	58	62	64	66	68	70	72	76	78
80	82	88	90	92	98	30	60	74	50

un campione di misure della quantità X che si suppone seguano la distribuzione gaussiana di valore atteso μ e varianza σ^2 incogniti. Testare l'ipotesi nulla

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 60$$

(a) Si verifichi l'ipotesi per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$.

(b) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

(a) La media, la varianza e la deviazione standard campionarie dei dati risultano rispettivamente

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 61,40 \ , \\ s_X^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = 365,28 \ , \ s_X = \sqrt{s_X^2} = 19,11 \ .\end{aligned}$$

Se T è una v.a. con distribuzione di probabilità di Student t con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) \ .$$

Quindi, dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha = \frac{0{,}05}{2} = 0,025$ e $n = N-1 = 30-1 = 29$, si ottiene $t_{\frac{\alpha}{2},N-1} = t_{0.025,29} = 2,05$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} \leq t_{\frac{\alpha}{2},N-1} \ ,$$

si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} &= \sqrt{30}\frac{|61,40-60,00|}{19,11} = 0,40 \\ &< 2,05 = t_{0.025,29} \ .\end{aligned}$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

(b) In questo caso,

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) \\ &= 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,40\right) \ .\end{aligned}$$

Dalla tabella dei vaolri assunti da $t_{\alpha,n}$ si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} = 0,40$ per $n = N-1 = 29$ risulta essere $t_{\alpha,29} = 1,31$. Quindi, ponendo $t_{\frac{\alpha}{2},29} = 1,31$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2} = 0,10$. Ma poiché

$$\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,40\right) > \mathbb{P}_{29}\left(T > 1,31\right) = 0,10$$

si ha

$$p = 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,40\right) > 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,31\right) = 0,20$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha \leq 0,20$.

2. Se $\mathcal{C}_{30}\left(X\right)$ è il campione di misure della quantità X rappresentato dalla tabella di dati riportata in precedenza, testare l'ipotesi nulla

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 \leq 324$$

per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$ e stimare il p-dei dati.

Risp.

Se Y è una v.a. con distribuzione di probabilità χ^2 con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(Y > \chi^2_{\alpha,N-1}\right) \ ,$$

dunque l'ipotesi è da accettarsi se

$$\left(N-1\right)\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha,N-1} \ .$$

Nel caso in esame,

$$(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} = 29\frac{365,28}{324,00} = 32,70\ .$$

Inoltre, dalla tabella dei valori assunti da $\chi^2_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha = 0,05$ e $n = N-1 = 29$ si ottiene $\chi^2_{0.05,29} = 42,56$. Dunque, poiché

$$(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} = 32,70 < 42,56 = \chi^2_{0.05,29}$$

i dati di $\mathcal{C}_N\,(X)$ supportano l'ipotesi nulla. In questo caso,

$$p = \mathbb{P}_{N-1}\left(Y > (N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2}\right) = \mathbb{P}_{29}\,(Y > 32,70)\ \ ,$$

dalla tabella dei valori assunti da $\chi^2_{\alpha,n}$ per $n = N-1 = 29$ si ottiene che

$$\chi^2_{0.95,29} = 17,71 < (N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} = 32,70 < 42,56 = \chi^2_{0.05,29}\ .$$

Dunque,

$$0,05 < p < 0,95\ .$$

3. Supponiamo che ci siano inizialmente nel recinto 1 coppia di conigli fertili e 4 coppie di cuccioli che saranno fertili tra un mese. Calcolare, usando l'equazione di Fibonacci, quanti conigli ci saranno tra 6 mesi.

   Risp.

   Si tratta di risovere l'equazione di Fibonacci con le seguenti condizioni iniziali:

   $F\,(1)$ = popolazione iniziale = una coppia fertile + 4 coppie sterili = 5;

   $F\,(2)$ = popolazione dopo un mese = una coppia fertile + una coppia sterile generata da quella fertile iniziale + 4 coppie fertili, prima sterili = 6.

   Poiché

   $$F(n+2) = F(n+1) + F(n)\ ,$$

   si ha

   $F\,(7)$ = popolazione dopo 6 mesi = 73.

Esercizi di Matematica e Statistica applicate alla Biologia

a.a.2009/2010
04/02/2010

Cognome..**Nome**...........................
matricola...

1. Sia $\mathcal{C}_{30}(X)$, rappresentato dalla tabella di dati riportata qui di seguito,

4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
10	11	11	11	12	12	4	8	9	6

un campione di misure della quantità X che si suppone seguano la distribuzione gaussiana di valore atteso μ e varianza σ^2 incogniti. Testare l'ipotesi nulla

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 7$$

(a) Si verifichi l'ipotesi per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$.

(b) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

(a) La media, la varianza e la deviazione standard campionarie dei dati risultano rispettivamente

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 7,80 \ , \\ s_X^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = 5,82 \ , \ s_X = \sqrt{s_X^2} = 2,41 \ .\end{aligned}$$

Se T è una v.a. con distribuzione di probabilità di Student t con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) \ .$$

Quindi, dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha = \frac{0{,}05}{2} = 0,025$ e $n = N-1 = 30-1 = 29$, si ottiene $t_{\frac{\alpha}{2},N-1} = t_{0.025,29} = 2,05$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} \leq t_{\frac{\alpha}{2},N-1} \ ,$$

si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} &= \sqrt{30}\frac{|7,80-7,00|}{2,41} = 1,82 \\ &< 2,05 = t_{0.025,29} \ .\end{aligned}$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

(b) In questo caso,

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) \\ &= 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,82\right) \ .\end{aligned}$$

Dalla tabella dei vaolri assunti da $t_{\alpha,n}$ si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} = 1,82$ per $n = N-1 = 29$ risulta essere $t_{\alpha,29} = 2,05$. Quindi, ponendo $t_{\frac{\alpha}{2},29} = 2,05$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2} = 0,025$. Ma poiché

$$\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,82\right) > \mathbb{P}_{29}\left(T > 2,05\right) = 0,025$$

si ha

$$p = 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,82\right) > 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 2,05\right) = 0,05$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha \leq 0,05$.

2. Se $\mathcal{C}_{30}(X)$ è il campione di misure della quantità X rappresentato dalla tabella di dati riportata in precedenza, testare l'ipotesi nulla

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 \leq 7$$

per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$ e stimare il p-dei dati.

Risp.

Se Y è una v.a. con distribuzione di probabilità χ^2 con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(Y > \chi^2_{\alpha,N-1}\right) \ ,$$

dunque l'ipotesi è da accettarsi se

$$(N-1)\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha,N-1} \ .$$

Nel caso in esame,

$$(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} = 29\frac{5,82}{7,00} = 24,11\ .$$

Inoltre, dalla tabella dei valori assunti da $\chi^2_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha = 0,05$ e $n = N-1 = 29$ si ottiene $\chi^2_{0.05,29} = 42,56$. Dunque, poiché

$$(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} = 24,11 < 42,56 = \chi^2_{0.05,29}$$

i dati di $\mathcal{C}_N\,(X)$ supportano l'ipotesi nulla. In questo caso,

$$p = \mathbb{P}_{N-1}\left(Y > (N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2}\right) = \mathbb{P}_{29}\,(Y > 24,11)\ \ ,$$

dalla tabella dei valori assunti da $\chi^2_{\alpha,n}$ per $n = N-1 = 29$ si ottiene che

$$\chi^2_{0.95,29} = 17,71 < (N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} = 24,11 < 42,56 = \chi^2_{0.05,29}\ .$$

Dunque,

$$0,05 < p < 0,95\ .$$

3. Data l'equazione discreta di Verhulst

$$F(n+1) - F(n) = (1 - 0,2F(n))F(n)\,,$$

calcolare la portata del modello e determinare $F(4)$ se $F(1) = 3$.

Risp.

La portata p si calcola ponendo a zero $F(n+1) - F(n)$, ovvero

$$1 - 0,2p = 0 \Longrightarrow p = \frac{1}{0,2} = \frac{10}{2} = 5\ .$$

Per calcolare i valori $F(n)$ conviene riscrivere l'equazione nella forma

$$F(n+1) = 2F(n) - \frac{1}{5}F^2(n)\ .$$

Ne segue che,

$$\begin{aligned}
F\,(2) &= 2F(1) - \frac{1}{5}F^2(1) = 6 - \frac{9}{5} = \frac{21}{5}\\
F\,(3) &= 2F(2) - \frac{1}{5}F^2(2) = \frac{42}{5} - \frac{441}{125} = \frac{609}{125}\\
F\,(4) &= \frac{1218}{125} - \frac{1}{5}\left(\frac{609}{125}\right)^2 = \frac{390\,369}{78\,125} \simeq 5,00\ .
\end{aligned}$$

Esercizi di Matematica e Statistica applicate alla Biologia

a.a.2009/2010
04/02/2010

Cognome...**Nome**...........................
matricola...

1. Sia $\mathcal{C}_{30}(X)$, rappresentato dalla tabella di dati riportata qui di seguito,

5	5	6	6	6	7	7	7	8	8
8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
11	12	12	12	13	13	5	9	10	7

un campione di misure della quantità X che si suppone seguano la distribuzione gaussiana di valore atteso μ e varianza σ^2 incogniti. Testare l'ipotesi nulla
$$\mathbf{H}_0 : \mu = 8$$

(a) Si verifichi l'ipotesi per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$.

(b) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

(a) La media, la varianza e la deviazione standard campionarie dei dati risultano rispettivamente

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 8,80 \ , \\ s_X^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = 5,82 \ , \ \ s_X = \sqrt{s_X^2} = 2,41 \ . \end{aligned}$$

Se T è una v.a. con distribuzione di probabilità di Student t con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) \ .$$

Quindi, dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha = \frac{0{,}05}{2} = 0,025$ e $n = N-1 = 30-1 = 29$, si ottiene $t_{\frac{\alpha}{2},N-1} = t_{0.025,29} = 2,05$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} \leq t_{\frac{\alpha}{2},N-1} \ ,$$

si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} &= \sqrt{30}\frac{|8,80-8,00|}{2,41} = 1,82 \\ &< 2,05 = t_{0.025,29} \ .\end{aligned}$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

(b) In questo caso,

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) \\ &= 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,82\right) \ . \end{aligned}$$

Dalla tabella dei vaolri assunti da $t_{\alpha,n}$ si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} = 1,82$ per $n = N-1 = 29$ risulta essere $t_{\alpha,29} = 2,05$. Quindi, ponendo $t_{\frac{\alpha}{2},29} = 2,05$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2} = 0,025$. Ma poiché

$$\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,82\right) > \mathbb{P}_{29}\left(T > 2,05\right) = 0,025$$

si ha

$$p = 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,82\right) > 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 2,05\right) = 0,05$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha \leq 0,05$.

2. Se $\mathcal{C}_{30}(X)$ è il campione di misure della quantità X rappresentato dalla tabella di dati riportata in precedenza, testare l'ipotesi nulla

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 \leq 7$$

per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$ e stimare il p-dei dati.

Risp.

Se Y è una v.a. con distribuzione di probabilità χ^2 con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(Y > \chi^2_{\alpha,N-1}\right) \ ,$$

dunque l'ipotesi è da accettarsi se

$$(N-1)\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha,N-1} \ .$$

Nel caso in esame,

$$(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2}=29\frac{5,82}{7,00}=24,11\ .$$

Inoltre, dalla tabella dei valori assunti da $\chi^2_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha=0,05$ e $n=N-1=29$ si ottiene $\chi^2_{0.05,29}=42,56$. Dunque, poiché

$$(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2}=24,11<42,56=\chi^2_{0.05,29}$$

i dati di $\mathcal{C}_N\,(X)$ supportano l'ipotesi nulla. In questo caso,

$$p=\mathbb{P}_{N-1}\left(Y>(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2}\right)=\mathbb{P}_{29}\,(Y>24,11)\ \ ,$$

dalla tabella dei valori assunti da $\chi^2_{\alpha,n}$ per $n=N-1=29$ si ottiene che

$$\chi^2_{0.95,29}=17,71<(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2}=24,11<42,56=\chi^2_{0.05,29}\ .$$

Dunque,

$$0,05<p<0,95\ .$$

3. Supponiamo che ci siano inizialmente nel recinto 2 coppie di conigli fertili e 3 coppie di cuccioli che saranno fertili tra un mese. Calcolare, usando l'equazione di Fibonacci, quanti conigli ci saranno tra 5 mesi.

   Risp.

   Si tratta di risovere l'equazione di Fibonacci con le seguenti condizioni iniziali:

   $F\,(1)$ = popolazione iniziale = 2 coppie fertili + 3 coppie sterili = 5;

   $F\,(2)$ = popolazione dopo un mese = 2 coppie fertili + 2 coppie sterili generate da quelle fertili iniziali + 3 coppie fertili, prima sterili = 7.

   Poiché

   $$F(n+2)=F(n+1)+F(n)\ ,$$

   si ha

   $F\,(6)$ = popolazione dopo 5 mesi = 50.

Esercizi di Matematica e Statistica applicate alla Biologia

a.a.2009/2010
04/02/2010

Cognome...**Nome**...........................
matricola...

1. Sia $\mathcal{C}_{30}(X)$, rappresentato dalla tabella di dati riportata qui di seguito,

33	35	37	41	43	45	47	49	53	55
57	59	63	65	67	69	71	73	77	79
81	83	89	91	93	99	31	61	75	51

un campione di misure della quantità X che si suppone seguano la distribuzione gaussiana di valore atteso μ e varianza σ^2 incogniti. Testare l'ipotesi nulla
$$\mathbf{H}_0 : \mu = 62$$

(a) Si verifichi l'ipotesi per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$.

(b) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

(a) La media, la varianza e la deviazione standard campionarie dei dati risultano rispettivamente

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 62,40 \ , \\ s_X^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = 365,28 \ , \ s_X = \sqrt{s_X^2} = 19,11 \ .\end{aligned}$$

Se T è una v.a. con distribuzione di probabilità di Student t con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) \ .$$

Quindi, dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha = \frac{0{,}05}{2} = 0,025$ e $n = N-1 = 30-1 = 29$, si ottiene $t_{\frac{\alpha}{2},N-1} = t_{0.025,29} = 2,05$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} \leq t_{\frac{\alpha}{2},N-1} \ ,$$

si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} &= \sqrt{30}\frac{|62,40-62,00|}{19,11} = 0,11 \\ &< 2,05 = t_{0.025,29} \ .\end{aligned}$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

(b) In questo caso,

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) \\ &= 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,11\right) \ .\end{aligned}$$

Dalla tabella dei vaolri assunti da $t_{\alpha,n}$ si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} = 0,40$ per $n = N-1 = 29$ risulta essere $t_{\alpha,29} = 1,31$. Quindi, ponendo $t_{\frac{\alpha}{2},29} = 1,31$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2} = 0,10$. Ma poiché

$$\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,11\right) > \mathbb{P}_{29}\left(T > 1,31\right) = 0,10$$

si ha

$$p = 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,11\right) > 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,31\right) = 0,20$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha \leq 0,20$.

2. Se $\mathcal{C}_{30}\left(X\right)$ è il campione di misure della quantità X rappresentato dalla tabella di dati riportata in precedenza, testare l'ipotesi nulla

$$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 \leq 324$$

per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$ e stimare il p-dei dati.

Risp.

Se Y è una v.a. con distribuzione di probabilità χ^2 con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(Y > \chi^2_{\alpha,N-1}\right) \ ,$$

dunque l'ipotesi è da accettarsi se

$$\left(N-1\right)\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha,N-1} \ .$$

Nel caso in esame,

$$(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} = 29\frac{365,28}{324,00} = 32,70\ .$$

Inoltre, dalla tabella dei valori assunti da $\chi^2_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha = 0,05$ e $n = N-1 = 29$ si ottiene $\chi^2_{0.05,29} = 42,56$. Dunque, poiché

$$(N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} = 32,70 < 42,56 = \chi^2_{0.05,29}$$

i dati di $\mathcal{C}_N(X)$ supportano l'ipotesi nulla. In questo caso,

$$p = \mathbb{P}_{N-1}\left(Y > (N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2}\right) = \mathbb{P}_{29}(Y > 32,70)\ ,$$

dalla tabella dei valori assunti da $\chi^2_{\alpha,n}$ per $n = N-1 = 29$ si ottiene che

$$\chi^2_{0.95,29} = 17,71 < (N-1)\,\frac{s_X^2}{\sigma_0^2} = 32,70 < 42,56 = \chi^2_{0.05,29}\ .$$

Dunque,

$$0,05 < p < 0,95\ .$$

3. Si consideri l'equazione differenziale di Verhulst

$$x' = 0,6x - 0,1x^2\,,$$

se ne calcoli la portata, si scriva la soluzione esplicita in corrispondenza ai valori iniziali $x_1(0) = 3$ ed $x_2(0) = 8$ e si calcolino i valori $x_1(4)$ ed $x_2(4)$.

Risp.

La portata si ricava dall'equazione

$$0,6 - 0,1p = 0$$

e dunque $p = 6$.

Le soluzioni dell'equazione differenziale in corrispondenza dei dati iniziali $x_1(0)$ e $x_2(0)$ sono

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{p x_1(0)\, e^{\frac{6}{10}t}}{p + x_1(0)\left(e^{\frac{6}{10}t} - 1\right)} = \frac{18e^{\frac{6}{10}t}}{6 + 3\left(e^{\frac{6}{10}t} - 1\right)}\ , \\ x_2(t) &= \frac{p x_2(0)\, e^{\frac{6}{10}t}}{p + x_2(0)\left(e^{\frac{6}{10}t} - 1\right)} = \frac{48e^{\frac{6}{10}t}}{6 + 8\left(e^{\frac{6}{10}t} - 1\right)}\ . \end{aligned}$$

Perciò,

$$\begin{aligned} x_1(4) &= 6\frac{e^{\frac{12}{5}}}{1 + e^{\frac{12}{5}}} \simeq 5,05\ , \\ x_2(4) &= \frac{24e^{\frac{12}{5}}}{4e^{\frac{12}{5}} - 1} \simeq 6,12\ . \end{aligned}$$