Esame di Matematica e Statistica applicate alla Biologia
appello del 14/07/2010

La discussione del compito e la verbalizzazione dell'esame avverranno in data 21/07
alle ore 16:00 presso l'ufficio del Prof. Volcic Cubo 30B V piano

Angotti		Maria	Francesca	138093	25/30
Baratta		Sarah		137981	24/30
Bilotta		Simona		138065	30/30
Cavaliere	Sgroi	Carla		138002	30/30
D'Alessandro		Gabriella		138042	23/30
De Mari		Elisa	Maria	137999	22/30
Falsetta		Francesca		138210	27/30
Fazzari		Gilda		138030	30/30
Garofalo		Vincenzo		137996	28/30
Graziadio		Lucia		138233	30/30
Lanzillotta		Donatella		138680	15/30
Ledonne		Claudia		138105	27/30
Logiacco		Caterina		138161	23/30
Lo Muto		Loredana		138090	15/30
Mazzulla		Emanuela		138069	27/30
Mosciaro		Lucia		138064	29/30
Paciência		Filipa			19/30
Raschellà		Francesca		138159	24/30
Silvaggio		Graziella		137997	30/30
Stumpo		Giuseppina		138001	25/30
Ventura		Tiziana		138098	27/30

Esercizi di Matematica e Statistica applicate alla Biologia

a.a.2009/2010
14/07/2010

Cognome...**Nome**...........................
matricola...

1. Sia $\mathcal{C}_{30}(X)$, rappresentato dalla tabella di dati riportata qui di seguito,

31	33	35	39	41	43	45	47	51	53
55	57	61	63	65	67	69	71	75	77
79	81	87	89	91	97	29	59	73	49

un campione di misure della quantità X che si suppone seguano la distribuzione gaussiana di valore atteso μ e varianza $\sigma^2 = 361$. Testare l'ipotesi nulla

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 62 \tag{1}$$

(a) Si verifichi l'ipotesi per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$.

(b) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

a. La media campionaria dei dati risulta

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 60,40 \ ,$$

Se Z è una v.a. con distribuzione di probabilità normale standard $\mathbb{P}$,

$$\alpha = \mathbb{P}\left(|Z| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\mathbb{P}\left(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \ ,$$

dalla tabella dei valori assunti da z_α per un valore di $\alpha = \frac{0,05}{2} = 0,025$ si ottiene $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \ ,$$

si ha

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma} = \sqrt{30}\frac{|60,40-62|}{19} = 0,46 < 1,96 = z_{0,025}$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

b. In questo caso,

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}\left(|Z| > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma}\right) = 2\mathbb{P}\left(Z > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma}\right) \\ &= 2\mathbb{P}\left(Z > 0,46\right) \end{aligned}$$

Dalla tabella dei valori assunti da z_α si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma} = 0,46$ risulta essere $z_\alpha = 0,524$. Quindi, ponendo $z_{\frac{\alpha}{2}} = 0,524$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2} = 0,30$. Ma poiché

$$\mathbb{P}\left(Z > 0,46\right) > \mathbb{P}\left(Z > 0,524\right) = 0,30$$

si ha

$$p = 2\mathbb{P}\left(Z > 0,46\right) > 2\mathbb{P}\left(Z > 0,524\right) = 0,60$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha \leq 0,60$.

2. Se $\mathcal{C}_{30}(X)$ è il campione di misure della quantità X rappresentato dalla tabella di dati riportata in precedenza, testare l'ipotesi nulla (1), supponendo incognita anche la varianza, per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$.

   (a) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

La varianza e la deviazione standard campionarie dei dati risultano rispettivamente

$$s_X^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = 365,28\ ,\ s_X = \sqrt{s_X^2} = 19,11\ .$$

Se T è una v.a. con distribuzione di probabilità di Student t con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right)\ .$$

Quindi, dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha = \frac{0,05}{2} = 0,025$ e $n = N-1 = 30-1 = 29$, si ottiene $t_{\frac{\alpha}{2},N-1} = t_{0.025,29} = 2,05$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} \leq t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\ ,$$

si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} &= \sqrt{30}\frac{|60,40-62,00|}{19,11}=0,46\\ &< 2,05=t_{0.025,29}\ .\end{aligned}$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

a. In questo caso,

$$\begin{aligned}p &= \mathbb{P}_{N-1}\left(|T|>\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right)=2\mathbb{P}_{N-1}\left(T>\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right)\\ &= 2\mathbb{P}_{29}\left(T>0,46\right)\ .\end{aligned}$$

Dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}=0,46$ per $n=N-1=29$ risulta essere $t_{\alpha,29}=1,31$. Quindi, ponendo $t_{\frac{\alpha}{2},29}=1,31$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2}=0,10$. Ma poiché

$$\mathbb{P}_{29}\left(T>0,46\right)>\mathbb{P}_{29}\left(T>1,31\right)=0,10$$

si ha

$$p=2\mathbb{P}_{29}\left(T>0,46\right)>2\mathbb{P}_{29}\left(T>1,31\right)=0,20$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha\leq 0,20$.

3. Supponiamo che ci siano inizialmente nel recinto 1 coppia di conigli fertili e 2 coppie di cuccioli che saranno fertili tra un mese. Calcolare, usando l'equazione di Fibonacci, quanti conigli ci saranno tra 5 mesi.

Risp.

Si tratta di risovere l'equazione di Fibonacci con le seguenti condizioni iniziali:

i. $F(1)$ = popolazione iniziale = una coppia fertile + due coppie sterili = 3;

ii. $F(2)$ = popolazione dopo un mese = una coppia fertile + una coppia sterile generata da quella fertile iniziale + due coppie fertili, prima sterili = 4.

Poiché

$$F(n+2)=F(n+1)+F(n)\ ,$$

si ha

$F(5)$ = popolazione dopo 5 mesi = 29.

Esercizi di Matematica e Statistica applicate alla Biologia

a.a.2009/2010
14/07/2010

Cognome..**Nome**...........................
matricola...

1. Sia $\mathcal{C}_{30}(X)$, rappresentato dalla tabella di dati riportata qui di seguito,

3	3	4	4	4	5	5	5	6	6
6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
9	10	10	10	11	11	3	7	8	7

un campione di misure della quantità X che si suppone seguano la distribuzione gaussiana di valore atteso μ e varianza $\sigma^2 = 4$. Testare l'ipotesi nulla

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 7 \tag{1}$$

(a) Si verifichi l'ipotesi per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$.

(b) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

a. La media campionaria dei dati risulta

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 6,80 \ ,$$

Se Z è una v.a. con distribuzione di probabilità normale standard $\mathbb{P}$,

$$\alpha = \mathbb{P}\left(|Z| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\mathbb{P}\left(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \ ,$$

dalla tabella dei valori assunti da z_α per un valore di $\alpha = \frac{0,05}{2} = 0,025$ si ottiene $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \ ,$$

si ha

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma} = \sqrt{30}\frac{|6,80-7|}{2} = 0,55 < 1,96 = z_{0,025}$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

b. In questo caso,

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}\left(|Z| > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma}\right) = 2\mathbb{P}\left(Z > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma}\right) \\ &= 2\mathbb{P}\left(Z > 0,55\right) \end{aligned}$$

Dalla tabella dei valori assunti da z_α si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma} = 0,55$ risulta essere $z_\alpha = 0,553$. Quindi, ponendo $z_{\frac{\alpha}{2}} = 0,553$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2} = 0,29$. Ma poiché

$$\mathbb{P}\left(Z > 0,55\right) > \mathbb{P}\left(Z > 0,553\right) = 0,29$$

si ha

$$p = 2\mathbb{P}\left(Z > 0,55\right) > 2\mathbb{P}\left(Z > 0,553\right) = 0,58$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha \leq 0,58$.

2. Se $\mathcal{C}_{30}(X)$ è il campione di misure della quantità X rappresentato dalla tabella di dati riportata in precedenza, testare l'ipotesi nulla (1), supponendo incognita anche la varianza, per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$.

   (a) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

La varianza e la deviazione standard campionarie dei dati risultano rispettivamente

$$s_X^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = 5,82\ ,\ s_X = \sqrt{s_X^2} = 2,41\ .$$

Se T è una v.a. con distribuzione di probabilità di Student t con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha = \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right)\ .$$

Quindi, dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha = \frac{0,05}{2} = 0,025$ e $n = N-1 = 30-1 = 29$, si ottiene $t_{\frac{\alpha}{2},N-1} = t_{0.025,29} = 2,05$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} \leq t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\ ,$$

si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} &= \sqrt{30}\frac{|6,80-7,00|}{2,41} = 0,45 \\ &< 2,05 = t_{0.025,29} \ . \end{aligned}$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

a. In questo caso,

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X}\right) \\ &= 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,45\right) \ . \end{aligned}$$

Dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s_X} = 0,45$ per $n = N-1 = 29$ risulta essere $t_{\alpha,29} = 1,31$. Quindi, ponendo $t_{\frac{\alpha}{2},29} = 1,31$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2} = 0,10$. Ma poiché

$$\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,45\right) > \mathbb{P}_{29}\left(T > 1,31\right) = 0,10$$

si ha

$$p = 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,45\right) > 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,31\right) = 0,20$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha \leq 0,20$.

3. Data l'equazione discreta di Verhulst

$$F(n+1) - F(n) = (1 - 0,3F(n))F(n)\,,$$

calcolare la portata del modello e determinare $F(4)$ se $F(1) = 2$.

1. *Risp.*

La portata p si calcola ponendo a zero $F(n+1) - F(n)$, ovvero

$$1 - 0,3p = 0 \Longrightarrow p = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3} \ .$$

Per calcolare i valori $F(n)$ conviene riscrivere l'equazione nella forma

$$F(n+1) = 2F(n) - \frac{3}{10}F^2(n) \ .$$

Ne segue che,

$$\begin{aligned} F\left(2\right) &= 2F(1) - \frac{3}{10}F^2(1) = 4 - \frac{6}{5} = \frac{14}{5} \\ F\left(3\right) &= 2F(2) - \frac{3}{10}F^2(2) = \frac{28}{5} - \frac{588}{250} = \frac{812}{250} \\ F\left(4\right) &= 2\frac{812}{250} - \frac{3}{10}\left(\frac{812}{250}\right)^2 = \frac{260\,246}{78\,125} \simeq 3.33 \ . \end{aligned}$$