Esame di Matematica e Statistica applicate alla Biologia
appello del 15/09/2010

La discussione del compito e la verbalizzazione dell'esame avverranno in data 16/09 alle ore 10:00 presso l'ufficio del Prof. Volcic Cubo 30B V piano

LANZILLOTTA	Donatella	138680	30/30
LOGIACCO	Caterina	138161	“

Esercizi di Matematica e Statistica applicate alla Biologia

a.a.2009/2010
15/09/2010

Cognome..**Nome**...........................
matricola..

1. Sia $\mathcal{C}_{30}(X)$, rappresentato dalla tabella di dati riportata qui di seguito,

5	5	7	7	7	9	9	9	11	11
11	11	13	13	13	15	15	15	17	17
17	19	19	19	20	20	5	13	15	13

un campione di misure della quantità X che si suppone seguano la distribuzione gaussiana di valore atteso μ e varianza $\sigma^2 = 16$. Testare l'ipotesi nulla

$$\mathbf{H}_0 : \mu = 13 \tag{1}$$

(a) Si verifichi l'ipotesi per un livello di confidenza $\alpha = 0,05$.

(b) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

a. La media campionaria dei dati risulta

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 12,60 \ ,$$

Se Z è una v.a. con distribuzione di probabilità normale standard $\mathbb{P}$,

$$\alpha = \mathbb{P}\left(|Z| > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\mathbb{P}\left(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \ ,$$

dalla tabella dei valori assunti da z_α per un valore di $\alpha = \frac{0,05}{2} = 0,025$ si ottiene $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \ ,$$

si ha

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu|}{\sigma}=\sqrt{30}\frac{|12,60-13,00|}{4}=0,55<1,96=z_{0,025}$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

b. In questo caso,

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}\left(|Z|>\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu|}{\sigma}\right)=2\mathbb{P}\left(Z>\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu|}{\sigma}\right) \\ &= 2\mathbb{P}\left(Z>0,55\right) \end{aligned}$$

Dalla tabella dei valori assunti da z_α si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma}=0,55$ risulta essere $z_\alpha=0,553$. Quindi, ponendo $z_{\frac{\alpha}{2}}=0,553$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2}=0,29$. Ma poiché

$$\mathbb{P}\left(Z>0,55\right)>\mathbb{P}\left(Z>0,553\right)=0,29$$

si ha

$$p=2\mathbb{P}\left(Z>0,55\right)>2\mathbb{P}\left(Z>0,553\right)=0,58$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha\leq 0,58$.

2. Se $\mathcal{C}_{30}\left(X\right)$ è il campione di misure della quantità X rappresentato dalla tabella di dati riportata in precedenza, testare l'ipotesi nulla (1), supponendo incognita anche la varianza, per un livello di confidenza $\alpha=0,05$.

   (a) Si calcoli o comunque si dia una stima del valore del p-dei dati *(p-value)* p e si indichi per quali valori del livello di confidenza α i dati del campione supportano l'ipotesi nulla.

Risp.

La varianza e la deviazione standard campionarie dei dati risultano rispettivamente

$$s_X^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=23,28\ ,\ s_X=\sqrt{s_X^2}=4,83\ .$$

Se T è una v.a. con distribuzione di probabilità di Student t con $N-1$ gradi di libertà $\mathbb{P}_{N-1}$,

$$\alpha=\mathbb{P}_{N-1}\left(|T|>t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right)=2\mathbb{P}_{N-1}\left(T>t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\right)\ .$$

Quindi, dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ per un valore di $\alpha=\frac{0,05}{2}=0,025$ e $n=N-1=30-1=29$, si ottiene $t_{\frac{\alpha}{2},N-1}=t_{0.025,29}=2,05$. Allora, poiché l'ipotesi è da accettarsi se

$$\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu|}{s_X}\leq t_{\frac{\alpha}{2},N-1}\ ,$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu|}{s_X} &= \sqrt{30}\frac{|12,60-13,00|}{4,83} = 0,45 \\
&< 2,05 = t_{0.025,29} \ .
\end{aligned}
$$

Quindi i dati del campione verificano l'ipotesi nulla.

a. In questo caso,

$$
\begin{aligned}
p &= \mathbb{P}_{N-1}\left(|T| > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu|}{s_X}\right) = 2\mathbb{P}_{N-1}\left(T > \sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu|}{s_X}\right) \\
&= 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,46\right) \ .
\end{aligned}
$$

Dalla tabella dei valori assunti da $t_{\alpha,n}$ si ottiene che il primo valore maggiore o uguale a $\sqrt{N}\frac{|\bar{x}-\mu|}{s_X} = 0,45$ per $n = N-1 = 29$ risulta essere $t_{\alpha,29} = 1,31$. Quindi, ponendo $t_{\frac{\alpha}{2},29} = 1,31$, dalla tabella si ottiene $\frac{\alpha}{2} = 0,10$. Ma poiché

$$
\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,45\right) > \mathbb{P}_{29}\left(T > 1,31\right) = 0,10
$$

si ha

$$
p = 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 0,45\right) > 2\mathbb{P}_{29}\left(T > 1,31\right) = 0,20
$$

e dunque i dati del campione verificano l'ipotesi nulla per tutti i livelli di confidenza $\alpha \leq 0,20$.

3. Supponiamo che ci siano inizialmente nel recinto 2 coppie di conigli fertili e 3 coppie di cuccioli che saranno fertili tra un mese. Calcolare, usando l'equazione di Fibonacci, quanti conigli ci saranno tra 5 mesi.

Risp.

Si tratta di risovere l'equazione di Fibonacci con le seguenti condizioni iniziali:

i. $F(1)$ = popolazione iniziale = due coppie fertili + tre coppie sterili = 5;

ii. $F(2)$ = popolazione dopo un mese = due coppie fertili + due coppie sterili generate da quelle fertili iniziali + tre coppie fertili, prima sterili = 7.

Poiché

$$
F(n+2) = F(n+1) + F(n) \ ,
$$

si ha

$F(5)$ = popolazione dopo 5 mesi = 50.