Teorema 1 *La densità di probabilità di* $\{B(t)\}_{t\in[t_1,t_2]}$ *condizionata a* $B(t_1) = a$ *e* $B(t_2) = b$ *è normale di media* $a + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}(b-a)$ *e varianza* $\frac{(t_2-t)(t-t_1)}{(t_2-t_1)}$.

Dimostrazione: Sia $\{X(t)\}_{t\in[t_1,t_2]}$ il processo stocastico di densità

$$g(y,t) := f(x,t|(a,t_1);(b,t_2)) \ , \tag{1}$$

dove

$$f(x,t|(a,t_1);(b,t_2)) = \frac{\mathbb{P}\{B(t)\in dx|B(t_1)=a, B(t_2)=b\}}{dx} \tag{2}$$

è la densità di probabilità di $B(t)$ condizionata all'evento $\{B(t_1)=a, B(t_2)=b\}$.

Allora, $X(t) \stackrel{d}{=} Y(t)$ con $\{Y(t)\}_{t\in[t_1,t_2]}$ il processo stocastico tale che $Y(t) = a + B(t-t_1)$ condizionato all'evento $\{B(t_2-t_1) = b-a\}$. Ma $Y(t) \stackrel{d}{=} a + W(t-t_1) + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}(b-a)$, dove $\{W(t-t_1)\}_{t\in[t_1,t_2]}$ è il ponte browniano tra t_1 e t_2, ovvero $W(t-t_1) \stackrel{d}{=} B(t-t_1) - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}B(t_2-t_1)$. Perciò, $\mathbb{E}[Y(t)] = a + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}(b-a)$ e

$$\mathbb{E}\left[Y(t) - a + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}(b-a)\right]^2 = \mathbb{E}\left[B(t-t_1) - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}B(t_2-t_1)\right]^2 \ . \tag{3}$$

Ma

$$B(t-t_1) - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}B(t_2-t_1) = \left[1 - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]B(t-t_1) - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\left[B(t_2-t_1) - B(t-t_1)\right] \tag{4}$$

e, siccome per ogni $t\in[t_1,t_2]$ fissato $B(t-t_1)$ e $[B(t_2-t_1) - B(t-t_1)]$ sono indipendenti,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[B(t-t_1) - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}B(t_2-t_1)\right]^2 \qquad (5)\\
&= \mathbb{E}\left[\left[1 - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]B(t-t_1) - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\left[B(t_2-t_1) - B(t-t_1)\right]\right]^2 \\
&= \left[1 - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]^2 \mathbb{E}\left[B^2(t-t_1)\right] + \left[\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]^2 \mathbb{E}\left[\left[B(t_2-t_1) - B(t-t_1)\right]^2\right] \\
&= \left[1 - \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]^2 (t-t_1) + \left[\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right]^2 (t_2-t) \\
&= \frac{(t_2-t)^2(t-t_1) + (t-t_1)^2(t_2-t)}{(t_2-t_1)^2} \\
&= \frac{(t_2-t)(t-t_1)}{(t_2-t_1)} \ ,
\end{aligned}$$

dove s'è usato il fato che

$$[B(t_2-t_1) - B(t-t_1)] \stackrel{d}{=} B((t_2-t_1)-(t-t_1)) = B(t_2-t) \ . \tag{6}$$

Dunque $W(t)$ è il processo stocastico gaussiano con distribuzione di probabilità

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{W(t-t_1) \in dx | W(0) = 0 = W(t_2-t_1)\right\} \qquad (7)\\
&= \frac{\mathbb{P}\left\{B(t-t_1) \in dx, B(t_2-t_1) - B(t-t_1) \in dy\right\}}{\mathbb{P}\left\{B(t_2-t_1) \in dy\right\}} \rceil_{y=0} \\
&= \frac{\frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{t-t_1}+\frac{(y-x)^2}{t_2-t}\right]}}{2\pi\sqrt{(t-t_1)(t_2-t)}}}{\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{t_2-t_1}}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}} \rceil_{y=0} \, dx \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(t_2-t_1)}{(t-t_1)(t_2-t)}x^2\right]}}{\sqrt{2\pi\frac{(t-t_1)(t_2-t)}{(t_2-t_1)}}} dx \ .
\end{aligned}$$

■