Leggi 0-1, successioni di v.a. stazionarie in senso stretto ed introduzione alla teoria ergodica

Michele Gianfelice

a.a. 2012-2013

1 Misura sullo spazio delle successioni a valori reali

Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni a valori reali. Dato un boreliano $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, sia

$$C(B) = \{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\omega_1, .., \omega_n) \in B\} \tag{1}$$

l'insieme cilindrico (*cilindro*) di base $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{C}$ la σalgebra generata dagli insiemi cilindrici.

Teorema 1 *(di Carathéodory) Sia Ω un insieme, $\mathcal{A}$ un'algebra dei suoi sottoinsiemi e $\sigma(\mathcal{A})$ la più piccola σalgebra contenente $\mathcal{A}$. Data μ_0 una misura σadditiva su $(\Omega, \mathcal{A})$. Esiste un unica misura μ su $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ estensione di μ_0, ovvero tale che $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \mu_0(A)$.*

Dato uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$, indichiamo con $\mathfrak{P}(\Omega, \mathcal{F})$ la collezione delle misure di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$.

Teorema 2 *(di Kolmogorov sull'estensione di misure su $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{C})$)*
Sia $\{\mathbb{P}_n\}_{n\geq 1}$, $\mathbb{P}_n \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ una collezione di misure di probabilità tali che $\forall n \geq 1$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{P}_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}_n(B). \tag{2}$$

Allora $\exists! \mathbb{P} \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{C})$ tale che se $\forall n \geq 1$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathbb{P}(C(B)) = \mathbb{P}_n(B). \tag{3}$$

Dimostrazione: $\forall n \geq 1$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, assegnamo a $\mathbb{P}(C(B))$ il valore $\mathbb{P}_n(B)$. Allora poiché, $\forall k \geq 1$,

$$\begin{aligned} C(B) &= \{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\omega_1, .., \omega_n) \in B,\, \omega_{n+1}, .., \omega_{n+k} \in \mathbb{R}\} \qquad (4) \\ &= C\left(B \times \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{k\, volte}\right) \end{aligned}$$

per la (2), la definizione di $\mathbb{P}(C(B))$ è indipendente dalla rappresentazione scelta di $C(B)$, infatti

$$\mathbb{P}_n(B) = \mathbb{P}_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = ... = \mathbb{P}_{n+k}(B \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}),\ k \geq 1. \tag{5}$$

Sia $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ la collezione di tutti i cilindri $C(B)$ al variare di $n \geq 1$ e $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. È facile vedere che $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ è un algebra. Dato $k \geq 2$ e $A_1, .., A_k \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ disgiunti, $\exists n \geq 1$ e $B_1, .., B_k \in \mathbb{R}^n$ boreliani disgiunti tale che $A_i = C(B_i)$, $i = 1, .., k$. Allora,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} C(B_i)\right) = \mathbb{P}\left(C\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}_n(B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(C(B_i)) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i), \end{aligned} \tag{6}$$

ovvero $\mathbb{P}$ è finitamente additiva sull'algebra $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$. Se $\mathbb{P}$ è anche σadditiva su $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ allora la tesi segue dal teorema precedente. A tal fine è sufficiente dimostrare che, per una generica successione di elementi di $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$, $\{C(B_n)\}_{n\geq 1}$ tale che $C(B_n) \downarrow \emptyset$, $\mathbb{P}(C(B_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Supponiamo il contrario, ovvero $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C(B_n)) = \delta > 0$. Poiché $\forall n \geq 1$, $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dato $\delta > 0$ esiste $A_n \subseteq B_n$ compatto tale che $\mathbb{P}_n(B_n \backslash A_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}$, allora,

$$\mathbb{P}(C(B_n) \backslash C(A_n)) = \mathbb{P}_n(B_n \backslash A_n) \leq \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{7}$$

Sia $\bar{C}_n := \bigcap_{k=1}^{n} C(A_k)$ e sia D_n tale che $\bar{C}_n = C(D_n)$. Poiché $\{C(B_n)\}_{n\geq 1}$ è decrescente, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C(B_n) \backslash C(D_n)) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C(B_n) \backslash C(A_k)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C(B_n \backslash A_k)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{2^{k+1}} = \frac{\delta}{2}, \end{aligned} \tag{8}$$

ma per ipotesi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C(B_n)) = \delta > 0$ e quindi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C(D_n)) \geq \frac{\delta}{2} > 0$. Ma ciò contraddice l'ipotesi che $C(D_n) \downarrow \varnothing$. Infatti, $\forall n \geq 1$ sia $x^{(n)} \in C(D_n)$, allora $\left(x_1^{(n)}, .., x_n^{(n)}\right) \in D_n$. Inoltre, poiché D_1 è compatto, esiste una sottosuccessione $\{n_1\}$ di $\{n\}$ tale che $x_1^{(n_1)} \to x_1^0 \in D_1$. Allo stesso modo è possibile scegliere $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ tale che $\left(x_1^{(n_2)}, x_2^{(n_2)}\right) \to (x_1^0, x_2^0) \in D_2$. Iterando questa costruzione si ha

$$\forall k \geq 1,\ \left(x_1^{(n_k)}, .., x_k^{(n_k)}\right) \to \left(x_1^0, .., x_k^0\right) \in D_k. \tag{9}$$

Considerando la sottosuccessione diagonale $\{m_k\}$ segue che $\forall i \geq 1$, $x_i^{(m_k)} \to x_i^0$ e $(x_1^0, ..) \in C(D_n)$ $\forall n \geq 1$ contrariamente all'ipotesi che $C(D_n) \downarrow \varnothing$. ■

2 Leggi 0-1 per successioni di v.a. indipendenti

Sia $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. definita sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e, $\forall n \geq 1$, siano

- $\mathcal{F}_n$ la σalgebra generata dalla collezione di v.a. $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, ovvero quella generata dalla collezione di eventi di $\mathcal{F}$:
$$\{\omega \in \Omega : (\xi_1(\omega), .., \xi_n(\omega)) \in B\} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \ ; \tag{10}$$
- $\mathcal{F}^n$ la σalgebra generata dalla collezione di v.a. $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$, ovvero quella generata dalla collezione di eventi di $\mathcal{F}$:
$$\{\omega \in \Omega : \left(\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), ..\right) \in B\} \quad B \in \mathcal{C} \, . \tag{11}$$

La σalgebra
$$\mathcal{T} := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n \tag{12}$$
è detta *σalgebra di coda.* Ne segue che $\forall n \geq 1$, se gli elementi della successione $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ sono v.a. indipendenti, ogni evento $A \in \mathcal{T}$ è indipendente da $\{\xi_i\}_{i=1}^n$.

Teorema 3 *(Legge 0-1 di Kolmogorov) Sia $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti definita sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(A)$ può assumere soltanto i valori zero e uno.*

Dimostrazione: Sia $A \in \mathcal{T}$. Allora, $A \in \mathcal{F}^1$ e pertanto $\exists A_n \in \mathcal{F}_n$ tale che
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \triangle A_n) = 0, \tag{13}$$
ovvero
$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \ , \tag{14}$$
ma allora
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \cap A_n) = \mathbb{P}(A) \ .$$
Poiché per ipotesi $A \in \mathcal{T}$, A e A_n sono indipendenti, $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(A \cap A_n) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_n)$ che tende a $\mathbb{P}^2(A)$ per $n \to \infty$. Dunque, vale $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}^2(A)$. ∎

Corollario 4 *Nelle ipotesi del teorema precedente, una v.a. η definita su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e misurabile rispetto a $\mathcal{T}$ è degenere, ovvero $\exists c \in \mathbb{R} : \eta = c\,\mathbb{P}$-q.c..*

Dimostrazione: Poiché η è $\mathcal{T}$-misurabile, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) \leq x\} \in \mathcal{T}$. Quindi,

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) \leq x\} = F_\eta(x) \tag{15}$$

può assumere soltanto i valori 0 e 1. Sia

$$c := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_\eta(x) = 1\}\,. \tag{16}$$

Allora, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : c - \varepsilon < \eta(\omega) \leq c + \varepsilon\} = F_\eta(c+\varepsilon) - F_\eta(c-\varepsilon) = 1\,, \tag{17}$$

cioè la tesi. ■

Definizione 5 *Un'applicazione* $\mathbb{N} \ni n \longmapsto \sigma_n \in \mathbb{N}$ *è detta* permutazione finita *se* $\sigma_n = n$ *salvo un numero finito di elementi di* $\mathbb{N}$. *Sia quindi, per ogni permutazione finita* σ,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni x \longmapsto \mathbf{T}_\sigma x = \{x_{\sigma_n}\}_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,. \tag{18}$$

e $\forall B \in \mathcal{C}$

$$\mathbf{T}_\sigma^{-1}(B) := \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \mathbf{T}_\sigma x \in B\right\}\,. \tag{19}$$

Data $\xi := \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\forall B \in \mathcal{C}$, sia

$$A_B := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\}\,, \tag{20}$$

e, posto $\mathbf{T}_\sigma(\xi) := \{\xi_{\sigma_i}\}_{i\geq 1}$, sia

$$A_{\mathbf{T}_\sigma^{-1}(B)} := \{\omega \in \Omega : \mathbf{T}_\sigma(\xi)(\omega) \in B\}\,. \tag{21}$$

Definizione 6 *Ogni evento* $A \in \mathcal{F}$ *è detto* simmetrico *se* $\exists B \in \mathcal{C}$ *tale che* $A = A_B$ *e per ogni permutazione finita* σ, $A_B = A_{\mathbf{T}_\sigma^{-1}(B)}$.

Teorema 7 *(Legge 0-1 di Hewitt-Savage) Sia* $\xi := \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di v.a.i.i.d.. Ogni evento simmetrico ha probabilità zero o uno.*

Dimostrazione: Sia A un evento simmetrico e sia quindi $B \in \mathcal{C}$ tale che $A = A_B$. Sia $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che, se

$$A_n := A_{C(B_n)} = \{\omega \in \Omega : (\xi_1(\omega), .., \xi_n(\omega)) \in B_n\}, \tag{22}$$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \triangle A_n) = 0$. Poiché le ξ_i sono v.a.i.i.d., per ogni permutazione finita σ,

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}_\xi(C(B_n)) = \mathbb{P}_{\mathbf{T}_\sigma(\xi)}(C(B_n))\,. \tag{23}$$

Dunque,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\triangle A_n) &= \mathbb{P}(A_B\triangle A_n) = \mathbb{P}_\xi(B\triangle C(B_n)) = \mathbb{P}_{\mathbf{T}_\sigma(\xi)}(B\triangle C(B_n)) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \mathbf{T}_\sigma(\xi)(\omega)\in B\}\triangle\{\omega\in\Omega : \mathbf{T}_\sigma(\xi)(\omega)\in C(B_n)\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \xi(\omega)\in B\}\triangle\{\omega\in\Omega : \mathbf{T}_\sigma(\xi)(\omega)\in C(B_n)\}) \\ &= \mathbb{P}\left(A\triangle A_{\mathbf{T}_\sigma^{-1}(C(B_n))}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Allora, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(A\triangle A_{\mathbf{T}_\sigma^{-1}(C(B_n))}\right) = 0$, ovvero $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(A_{\mathbf{T}_\sigma^{-1}(C(B_n))}\right) = \mathbb{P}(A)$, il che implica

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(A_n\cap A_{\mathbf{T}_\sigma^{-1}(C(B_n))}\right) = \mathbb{P}(A). \tag{25}$$

Scelta la permutazione finita σ tale che, $\sigma_i = 2n-i+1$ per $i=1,..,n$ e $\sigma_i = i\,\forall i\geq n+1$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(A_n\cap A_{\mathbf{T}_\sigma^{-1}(C(B_n))}\right) = \\ &\qquad \mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : (\xi_1(\omega),..,\xi_n(\omega))\in B_n\}\cap\{\omega\in\Omega : \left(\xi_{2n}(\omega),..\xi_{n+1}(\omega)\right)\in B_n\}\right),\end{aligned}$$

ma poiché le ξ_i sono v.a.i.i.d.,

$$\mathbb{P}\left(A_n\cap A_{\mathbf{T}_\sigma^{-1}(C(B_n))}\right) = \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}\left(A_{\mathbf{T}_\sigma^{-1}(C(B_n))}\right) = \mathbb{P}^2(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}^2(A). \tag{26}$$

Perciò $\forall A\in\mathcal{F}$ simmetrico $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}^2(A)$. ∎

Osservazione 8 *Se* $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di v.a. indipendenti definita sullo spazio di probabilità* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, *sia* $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *la successione di v.a. tale che* $\forall n\geq 1$, $S_n := \sum_{k=1}^n \xi_n$. *Allora, se* χ^n *è la* σ*algebra generata dalle v.a.* $\{S_m\}_{m\geq n}$, *ogni evento* $A\in\mathcal{T}(S) := \bigcap_{n\geq 1}\chi^n$ *è invariante per permutazioni finite, quindi, se le* ξ_i *sono v.a.i.i.d.,* $\mathbb{P}(A)$ *assume soltanto i valori* 0 *e* 1. *È altrettanto vero che ogni evento* $A\in\mathcal{T}$ *essendo indipendente dai valori assunti da* $\xi_1,..,\xi_n$, $\forall n\geq 1$, *è invariante per permutazioni finite. Quindi la Legge 0-1 di Kolmogorov nel caso di una successione di v.a.i.i.d., risulta essere un corollario di quella di Hewitt-Savage.*

3 Successioni di v.a. stazionarie (in senso stretto)

Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni u \longmapsto \mathbf{S}u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'applicazione tale che $\forall i \geq 1$, $(\mathbf{S}u)_i = u_{i+1}$ e $\forall B \in \mathcal{C}$ sia

$$\mathbf{S}^{-1}B := \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \mathbf{S}u \in B\}. \tag{27}$$

Dunque, $\forall n \geq 2, \mathbf{S}^{-n}B = \mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{S}^{-(n-1)}B\right)$. Inoltre, se $B \in \mathcal{C}$, da (20) segue che, $\forall n \geq 1$,

$$A_{\mathbf{S}^{-n}B} = \{\omega \in \Omega : \mathbf{S}^n\xi(\omega) \in B\}\ . \tag{28}$$

Definizione 9 *Sia* $\xi = \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di v.a. definita sullo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Un evento* $A \in \mathcal{F}$ *è detto* invariante *relativamente alla successione* ξ *se* $\exists B \in \mathcal{C}$ *tale che* $\forall n \geq 1$

$$A := \{\omega \in \Omega : \mathbf{S}^n\xi(\omega) \in B\}. \tag{29}$$

Sia inoltre $\mathcal{I}$ *la* σ*algebra generata dalla collezione di tali insiemi.*

Definizione 10 *Una v.a.* η *definita sullo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *è detta* invariante *relativamente alla successione* ξ *se è* $\mathcal{I}$ *misurabile, ovvero se esiste una v.a.* φ *definita su* $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{C}\right)$ *tale che* $\eta = \varphi \circ \xi = \varphi \circ \mathbf{S}\xi$.

Definizione 11 *Una successione di v.a.* $\xi = \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ *definita su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *è detta* stazionaria (in senso stretto, rispetto a $\mathbb{P}$) *se* $\forall B \in \mathcal{C}$, $n \geq 1\, \mathbb{P}(A_B) = \mathbb{P}(A_{\mathbf{S}^{-n}B})$.

Definizione 12 *Una successione di v.a.* $\xi = \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ *definita su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *stazionaria, è detta* ergodica (rispetto a $\mathbb{P}$) *se,* $\forall A \in \mathcal{F}$ *invariante rispetto a* ξ, $\mathbb{P}(A)$ *può assumere solo i valori zero e uno.*

Proposizione 13 *Ogni evento invariante per la successione di v.a.* $\xi = \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ *definita su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *appartiene alla* σ*algebra di coda.*

Dimostrazione: $\mathcal{T} = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n$, ma $\mathcal{F}^n$ è la σalgebra generata dalla successione $\mathbf{S}^n\xi$ quindi $\mathcal{T} = \bigcap_{n\geq 1} \mathbf{S}^{-n}\mathcal{F}_\xi$ con $\mathcal{F}_\xi \subseteq \mathcal{F}$ la σalgebra generata dalla collezione d'insiemi $\{A_B\}_{B\in\mathcal{C}}$. Poiché se A è invariante, per definizione $\exists B \in \mathcal{C}$ tale che $\forall n \geq 1$,

$$A = \{\omega \in \Omega : \mathbf{S}^n\xi \in B\}, \tag{30}$$

$A \in \mathbf{S}^{-n}\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}^n$. ■

Osservazione 14 *Se* $\xi = \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ *è una successione di v.a.i.i.d.,* ξ *è stazionaria in senso stretto. Quindi, poiché la* σ*algebra degli insiemi invarianti è contenuta nella* σ*algebra di coda, l'ergodicità della successione* ξ *segue dalla Legge 0-1 di Kolmogorov.*

Teorema 15 *(Ergodico massimale) Sia* $\xi = \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di v.a. definite sullo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *stazionaria e tale che* $\xi_1 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Sia* $\forall n \geq 1$, $S_n := \sum_{k=1}^n \xi_k$ *e* $M_n := \max\{0, S_1, .., S_n\}$. *Allora,*

$$\mathbb{E}\left[\xi_1 \mathbf{1}_{\{\omega\in\Omega: M_n(\omega)>0\}}\right] \geq 0 \ . \tag{31}$$

Dimostrazione: Poiché $\forall n \geq 1$ sia M_n che S_n dipendono soltanto dal vettore aleatorio $(\xi_1, .., \xi_n)$, siano $\bar{M}_n, \bar{S}_n$ variabili aleatorie su $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{C})$ tali che $M_n = \bar{M}_n \circ \xi, S_n = \bar{S}_n \circ \xi$. Allora, $\forall 1 \leq k \leq n$,

$$\bar{M}_n \circ \mathbf{S}\xi \geq \bar{S}_k \circ \mathbf{S}\xi \ . \tag{32}$$

Perciò

$$\xi_1 + \bar{M}_n \circ \mathbf{S}\xi \geq \bar{S}_k \circ \mathbf{S}\xi + \xi_1 = \bar{S}_{k+1} \circ \xi \ . \tag{33}$$

Quindi,

$$\xi_1 \geq \xi_1 - \bar{M}_n \circ \mathbf{S}\xi = \bar{S}_1 \circ \xi - \bar{M}_n \circ \mathbf{S}\xi \ . \tag{34}$$

Allora

$$\xi_1 \geq \max\left\{\bar{S}_1 \circ \xi, .., \bar{S}_n \circ \xi\right\} - \bar{M}_n \circ \mathbf{S}\xi \tag{35}$$

e

$$\mathbb{E}\left[\xi_1 \mathbf{1}_{\{\omega\in\Omega: M_n(\omega)>0\}}\right] \geq \mathbb{E}\left[\left(\max\left\{\bar{S}_1 \circ \xi, .., \bar{S}_n \circ \xi\right\} - \bar{M}_n \circ \mathbf{S}\xi\right) \mathbf{1}_{\{\omega\in\Omega: M_n(\omega)>0\}}\right] \ . \tag{36}$$

Ma

$$\max\left\{\bar{S}_1 \circ \xi, .., \bar{S}_n \circ \xi\right\} \mathbf{1}_{\{\omega\in\Omega: M_n(\omega)>0\}} = \bar{M}_n \circ \xi \ . \tag{37}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi_1 \mathbf{1}_{\{\omega\in\Omega: M_n(\omega)>0\}}\right] &\geq \mathbb{E}\left[\left(\bar{M}_n \circ \xi - \bar{M}_n \circ \mathbf{S}\xi\right) \mathbf{1}_{\{\omega\in\Omega: M_n(\omega)>0\}}\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\left(\bar{M}_n \circ \xi - \bar{M}_n \circ \mathbf{S}\xi\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{38}$$

poiché dato che ξ è stazionaria $\xi \overset{d}{=} \mathbf{S}\xi$. ■

Teorema 16 *(Ergodico per successioni di v.a. stazionarie) Sia* $\xi = \{\xi_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di v.a. definite sullo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ergodica rispetto a* $\mathbb{P}$, *tale che* $\xi_1 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Allora, la successione di v.a.* $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}_{n\geq 1}$ *tale che,* $\forall n \geq 1, S_n := \sum_{k=1}^n \xi_k$, *converge a* $\mathbb{E}[\xi_1]$ $\mathbb{P}$*-q.c..*

Dimostrazione: Siano $\overline{\eta} := \overline{\lim}_n \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}]\right)$ e $\underline{\eta} := \underline{\lim}_n \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}]\right)$. Poiché $\overline{\eta}$ è invariante, ovvero è $\mathcal{I}$ misurabile, $\forall \varepsilon > 0, A_\varepsilon := \{\omega \in \Omega : \overline{\eta}(\omega) > \varepsilon\}$ è invariante. Definiamo $\forall i \geq 1$

$$\xi_i^* := (\xi_i - \mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}] - \varepsilon) \mathbf{1}_{A_\varepsilon} \tag{39}$$

e poniamo

$$S_k^* := \sum_{l=1}^{k} \xi_l^* \ , \qquad M_n^* := \max\{0, S_1^*, .., S_n^*\} \ . \tag{40}$$

Allora, poiché $M_n^* \leq M_{n+1}^*$,

$$\{\omega \in \Omega : M_n^*(\omega) > 0\} \subseteq \left\{\omega \in \Omega : M_{n+1}^*(\omega) > 0\right\} \ , \tag{41}$$

dunque,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \{\omega \in \Omega : M_n^*(\omega) > 0\} &= \left\{\omega \in \Omega : \sup_{n\geq 1} S_n^*(\omega) > 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : \sup_{n\geq 1} \frac{S_n^*(\omega)}{n} > 0\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{n\geq 1} \frac{S_n(\omega)}{n} - \mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}] > \varepsilon\right\} \cap A_\varepsilon
\end{aligned}$$

ma, poiché

$$\sup_{n\geq 1} \frac{S_n(\omega)}{n} \geq \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} \frac{S_n(\omega)}{n} = \overline{\eta} + \mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}] , \tag{42}$$

allora

$$\left\{\omega \in \Omega : \sup_{n\geq 1} \frac{S_n(\omega)}{n} - \mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}] > \varepsilon\right\} \supseteq A_\varepsilon \tag{43}$$

perciò

$$\lim_{n\to\infty} \{\omega \in \Omega : M_n^*(\omega) > 0\} = A_\varepsilon \ . \tag{44}$$

Inoltre, poiché $\xi_1 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, anche $\xi_1^* \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dato che, $\mathbb{E}[|\xi_1^*|] \leq \mathbb{E}[|\xi_1|] + \varepsilon$. Pertanto, per il Teorema ergodico massimale, $\forall n \geq 1, \mathbb{E}\left[\xi_1^* \mathbf{1}_{\{\omega\in\Omega: M_n^*(\omega)>0\}}\right] \geq 0$. Dunque, poiché $A_\varepsilon \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\xi_1^* \mathbf{1}_{\{\omega\in\Omega: M_n^*(\omega)>0\}}\right] &= \mathbb{E}[\xi_1^* \mathbf{1}_{A_\varepsilon}] = \mathbb{E}[(\xi_1 - \mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}] - \varepsilon) \mathbf{1}_{A_\varepsilon}] \\
&= \mathbb{E}[\xi_1 \mathbf{1}_{A_\varepsilon} - \mathbb{E}[\xi_1 \mathbf{1}_{A_\varepsilon}|\mathcal{I}]] - \varepsilon \mathbb{P}(A_\varepsilon) = -\varepsilon \mathbb{P}(A_\varepsilon) \ ,
\end{aligned} \tag{45}$$

ovvero $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(A_\varepsilon) = 0$, il che implica $\overline{\eta} \leq 0$ $\mathbb{P}$-q.c..

Considerando al posto di ξ, la successione $\{-\xi_i\}_{i\geq 1}$ si ha che

$$\overline{\lim_n} \left(\left(-\frac{S_n}{n}\right) + \mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}]\right) = -\underline{\eta} \tag{46}$$

da cui segue $-\underline{\eta} \leq 0$ $\mathbb{P}$-q.c., cioè $\underline{\eta} \geq 0$ $\mathbb{P}$-q.c.. Quindi, $0 \leq \underline{\eta} \leq \overline{\eta} \leq 0$ $\mathbb{P}$-q.c., ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}] \ \ \mathbb{P}\text{-q.c.}, \tag{47}$$

ma poiché la successione è ergodica, $\mathbb{E}[\xi_1|\mathcal{I}] = \mathbb{E}[\xi_1]$ $\mathbb{P}$-q.c.. ∎

3.1 Introduzione alla teoria ergodica

Definizione 17 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F})$ *uno spazio misurabile. Un'applicazione* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *è detta* misurabile *se,* $\forall A \in \mathcal{F}$,

$$T^{-1}A := \{\omega \in \Omega : T\omega \in A\} \in \mathcal{F} \ . \tag{48}$$

Definizione 18 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità. Un'applicazione* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *è detta* preservare la misura *se è misurabile e se* $\forall A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(T^{-1}A\right) \ , \tag{49}$$

ovvero se per ogni v.a. η *definita su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *si ha* $\mathbb{E}[\eta] = \mathbb{E}[\eta \circ T]$.

Proposizione 19 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità,* η *una v.a. su di esso definita e* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un'applicazione che preserva la misura. Ponendo per* $k = 1, \xi_1 := \eta$ *e,* $\forall k \geq 2, \xi_k := \eta \circ T^{k-1}$, *la successione di v.a.* $\xi = \{\xi_k\}_{k \geq 1}$ *è stazionaria.*

Dimostrazione: $\forall B \in \mathcal{C}$,

$$A_{\mathbf{S}^{-1}B} = \{\omega \in \Omega : \mathbf{S}\xi(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega : \xi(T\omega) \in B\} \ . \tag{50}$$

Pertanto, $\omega \in A_{\mathbf{S}^{-1}B} \Longleftrightarrow T\omega \in A_B$, ovvero $A_{\mathbf{S}^{-1}B} = T^{-1}A_B$. Ma siccome T preserva la misura $\mathbb{P}(A_{\mathbf{S}^{-1}B}) = \mathbb{P}(T^{-1}A_B) = \mathbb{P}(A_B)$. Ripetendo questo argomento per $A_{\mathbf{S}^{-k}B}$ con $k \geq 2$ si ha la tesi. ■

Proposizione 20 *Sia* ζ *una successione di v.a. stazionaria definita su uno spazio di probabilità* $(\Xi, \mathcal{X}, \mathbb{Q})$. *Allora si può costruire uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *una v.a.*$\eta$ *su di esso definita e un'applicazione* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *che preserva la misura tale che la successione di v.a.* ξ, *definita su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *come nella proposizione precedente coincide con* ζ *in distribuzione.*

Dimostrazione: Poniamo $\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} := \mathcal{C}, \mathbb{P} := \mathbb{Q} \circ \zeta^{-1}, T := \mathbf{S}$ e η tale che $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni u \longmapsto \eta(u) := u_1 \in \mathbb{R}$. Allora $\forall n \geq 1$ e ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} T^{-1}C(B) &= \{\omega \in \Omega : \mathbf{S}\omega \in C(B)\} = \{\omega \in \Omega : (\omega_2, .., \omega_{n+1}) \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega : ((\eta \circ T)(\omega), .., (\eta \circ T^n)(\omega)) \in B\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : \left(\xi_2(\omega), .., \xi_{n+1}(\omega)\right) \in B\right\} \ . \end{aligned} \tag{51}$$

Poiché ζ è stazionaria si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C(B)) &= \mathbb{Q}\{x \in \Xi : (\zeta_1(x), .., \zeta_n(x)) \in B\} \\ &= \mathbb{Q}\left\{x \in \Xi : \left(\zeta_2(x), .., \zeta_{n+1}(x)\right) \in B\right\} = \mathbb{P}\left(T^{-1}C(B)\right) \ , \end{aligned} \tag{52}$$

ovvero T preserva la misura. Inoltre, siccome $\forall n \geq 1$ e ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C(B)) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : (\xi_1(\omega), .., \xi_n(\omega)) \in B\} = \\ \mathbb{Q}\{x \in \Xi : (\zeta_1(x), .., \zeta_n(x)) \in B\} \ ,\end{aligned} \tag{53}$$

$\zeta \stackrel{d}{=} \xi$. ∎

Esempio 1 Un esempio di trasformazione che preserva la misura è il flusso di fase hamiltoniano che, per il Teorema di Liouville, conserva la misura di Lebesgue nello spazio delle fasi.

Teorema 21 *(di ricorrenza di Poincaré) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ un'applicazione che preserva la misura e $A \in \mathcal{F}$. Allora, $\mathbb{P}$-q.c. se $\omega \in A, T^n\omega \in A$ per infiniti valori di $n \geq 1$.*

Dimostrazione: Sia

$$\begin{aligned}N_0(A) &:= \{\omega \in A : T^n\omega \notin A, \forall n \geq 1\} = \bigcap_{n\geq 1} A \backslash \{\omega \in A : T^n\omega \in A\} \\ &= A \backslash \bigcup_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \ T^n\omega \in A\}\end{aligned} \tag{54}$$

l'insieme degli elementi di A la cui immagine sotto le trasformazioni della famiglia $\{T^n\}_{n\geq 1}$ non appartiene ad A. Siccome $\forall n \geq 1, N_0(A) \cap T^{-n}N_0(A) = \varnothing$, allora, $\forall m \geq 1$,

$$T^{-m}N_0(A) \cap T^{-(m+n)}N_0(A) = \varnothing \ . \tag{55}$$

Siccome T preserva la misura $\{T^{-n}N_0(A)\}_{n\geq 1}$ è una successione d'insiemi disgiunti di uguale misura

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N_0(A)) = \mathbb{P}(N_0(A)) + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(T^{-n}N_0(A)\right) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1 \ , \tag{56}$$

ovvero $\mathbb{P}(N_0(A)) = 0$. Quindi, per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in A, T^n\omega \in A$ per almeno un $n \geq 1$. Questo argomento si può ripetere sostituendo T^kA ad $A, \forall k \geq 1$. Pertanto, poiché posto $\forall k \geq 1, N_k(A) := N\left(T^kA\right), \mathbb{P}(N_k(A)) = 0$, quindi $\forall \omega \in A \backslash N(A)$, dove $N(A) := \bigcup_{k\geq 0} N_k(A), \forall m \geq 1, \exists n_m \geq 1$ tale che $(T^m)^{n_m}\omega \in A$. Dunque, $T^n\omega \in A$ per infiniti valori di $n \geq 1$. ∎

Corollario 22 *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ un'applicazione che preserva la misura e η una v.a. non negativa. Allora, $\mathbb{P}$-q.c. su $\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) > 0\}$,*

$$\eta(\omega) + \sum_{k\geq 1} \eta\left(T^k\omega\right) = \infty \ . \tag{57}$$

Dimostrazione: Sia $A_n := \left\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) \geq \frac{1}{n}\right\}$. Allora, per il teorema precedente, $\mathbb{P}$-q.c. su A_n,

$$\eta(\omega) + \sum_{k \geq 1} \eta\left(T^k \omega\right) = \infty \ , \tag{58}$$

quindi anche su $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \{\omega \in \Omega : \eta(\omega) > 0\}$. ■

Definizione 23 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un'applicazione misurabile. Un evento* $A \in \mathcal{F}$ *è detto*

- invariante *per* T *se* $T^{-1}A = A$;
- quasi invariante *per* T *se* $\mathbb{P}(A \triangle T^{-1}A) = 0$.

Chiaramente sia la collezione degli eventi invarianti $\mathcal{I}_T$ che quella degli eventi quasi invarianti $\mathcal{I}_T^*$ sono subσalgebre di $\mathcal{F}$. In particolare, $\mathcal{I}_T \subseteq \mathcal{I}_T^* \subseteq \mathcal{F}$.

Lemma 24 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un'applicazione che preserva la misura. Se* $A \in \mathcal{I}_T^*$ *allora* $\exists B \in \mathcal{I}_T$ *tale che* $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$.

Dimostrazione: Sia $B := \overline{\lim}_n T^{-n}A = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} T^{-k}A$. Allora, $T^{-1}B = B$ quindi $B \in \mathcal{I}_T$. Inoltre,

$$A \triangle B = \left(A \triangle T^{-1}A\right) \cup \left(\bigcup_{k \geq 1} \left(T^{-k}A \triangle T^{-(k+1)}A\right)\right) \ , \tag{59}$$

ma T preserva la misura, quindi

$$\mathbb{P}\left(\left(T^{-k}A \triangle T^{-(k+1)}A\right)\right) = \mathbb{P}\left(A \triangle T^{-1}A\right) = 0 \tag{60}$$

da cui segue che $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$. ■

Definizione 25 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un'applicazione misurabile. Una v.a.* η *è detta* invariante *per* T *se è* $\mathcal{I}_T$*-misurabile, ovvero* $\eta^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{I}_T$*, o, equivalentemente* $\eta = \eta \circ T$*. Allo stesso modo* η *si dirà quasi invariante per* T *se è* $\mathcal{I}_T^*$*-misurabile* ($\eta^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{I}_T^*$).

Definizione 26 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un'applicazione misurabile. Un evento* $A \in \mathcal{I}_T$ *è detto* metricamente indecomponibile *se non si può rappresentare come unione disgiunta di una coppia d'eventi invarianti di propabilità positiva, ovvero* $\nexists A_1, A_2 \in \mathcal{I}_T$ *tali che* $A_1 \cap A_2 = \varnothing; \mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2) > 0$ *e* $A = A_1 \bigvee A_2$.

Definizione 27 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità. Un'applicazione* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *che preserva la misura è detta* ergodica *o* metricamente transitiva *se* $\forall A \in \mathcal{I}_T, \mathbb{P}(A)$ *può assumere soltanto i valori zero e uno.*

Proposizione 28 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un'applicazione ergodica. Allora ogni evento invariante di probabilità positiva è metricamente indecomponibile se e solo se ha probabilità uno.*

Dimostrazione:

$\Longrightarrow$ T è ergodica, quindi per definizione ogni evento invariante di probabilità positiva ha probabilità uno.

$\Longleftarrow$ Sia $A \in \mathcal{I}_T$ tale che $\mathbb{P}(A) = 1$. Se A non fosse metricamente indecomponibile esisterebbero $A_1, A_2 \in \mathcal{I}_T$ disgiunti tali che $\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2) > 0$ e $A = A_1 \bigvee A_2$. Ma siccome T è ergodica

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1 = \mathbb{P}(A) \ ; \tag{61}$$

perciò si avrebbe che

$$1 = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 2 \ . \tag{62}$$

■

Lemma 29 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un'applicazione che preserva la misura. Allora,* T *è ergodica se e solo se ogni evento quasi invariante ha probabilità zero o uno.*

Dimostrazione:

$\Longrightarrow$ Se T preserva la misura, dal Lemma 24 segue che se $A \in \mathcal{I}_T^*$ allora $\exists B \in \mathcal{I}_T$ tale che $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$. Inoltre, se T è ergodica, la probabilità di un qualsiasi evento invariante, quindi anche di B, può assumere soltanto i valori zero e uno, dunque lo stesso vale per la probabilità di A.

$\Longleftarrow$ Segue dal fatto che $\mathcal{I}_T \subseteq \mathcal{I}_T^*$.

■

Teorema 30 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un'applicazione che preserva la misura. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. T *è ergodica.*
2. *Ogni v.a.* η *quasi invariante per* T *è costante* $\mathbb{P}$*-q.c..*
3. *Ogni v.a.* η *invariante per* T *è costante* $\mathbb{P}$*-q.c..*

Dimostrazione:

1) $\Longrightarrow$ 2) Se η è quasi invariante, allora $\forall c \in \mathbb{R}, A_c := \{\omega \in \Omega : \eta(\omega) \leq c\} \in \mathcal{I}_T^*$, e siccome T è ergodica $\mathbb{P}(A_c)$ può assumere soltanto i valori zero e uno. Posto $\kappa := \sup\{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(A_c) = 0\}$, siccome $A_c \uparrow \Omega$ per $c \to \infty$ e $A_c \downarrow \varnothing$ per $c \to -\infty$ allora $|\kappa| < \infty$. Dunque,

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) < \kappa\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}\left\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) \leq \kappa - \frac{1}{n}\right\}\right) = 0 \ . \tag{63}$$

Allo stesso modo si ha che $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) > \kappa\} = 0$, dunque $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) = \kappa\} = 1$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Se η è invariante è anche $\mathcal{I}_T^*$-misurabile perché $\mathcal{I}_T \subseteq \mathcal{I}_T^*$.

3) $\Longrightarrow$ 1) Dato $A \in \mathcal{I}_T$, allora $\mathbf{1}_A$ è una v.a. invariante per T che per ipotesi è costante $\mathbb{P}$-q.c.. Ma poiché $\mathbf{1}_A \in \{0,1\}, \mathbb{P}(A)$ può assumero soltanto i valori zero e uno e dunque T è ergodica.

$\blacksquare$

Definizione 31 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità. Un'applicazione* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *che preserva la misura è detta* mixing *se* $\forall A, B \in \mathcal{F}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A \cap T^{-n}B\right) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \ . \tag{64}$$

Teorema 32 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità. Ogni applicazione* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *mixing è ergodica.*

Dimostrazione: $\forall A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{I}_T$ poiché T è mixing, $\forall n \geq 1$, si ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\left(A \cap T^{-n}B\right) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \tag{65}$$

che, ponendo $A = B$, implica $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}^2(B)$, ovvero che ogni insieme invariante ha probabilità o zero o uno. $\blacksquare$

Teorema 33 *(di Birkhoff-Khinchin) Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità,* $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ *un'applicazione che preserva la misura e* $\eta \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Allora,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\eta + \sum_{k=1}^{n-1} \eta \circ T^k\right] = \mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T] \ \mathbb{P}\text{-}q.c.. \tag{66}$$

Se inoltre T *è ergodica* $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T] = \mathbb{E}[\eta]$ $\mathbb{P}$*-q.c..*

Dimostrazione: Ponendo per $k=1, \xi_1 := \eta$ e, $\forall k \geq 2, \xi_k := \eta \circ T^{k-1}$, per la Proposizione 19, la successione di v.a. $\xi = \{\xi_k\}_{k\geq 1}$ è stazionaria, quindi la tesi segue dal Teorema ergodico per successioni di v.a. stazionarie. Inoltre, se T è ergodica, dato che $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T]$ è $\mathcal{I}_T$-misurabile è invariante e quindi, per il Teorema 30 $\mathbb{P}$-q.c. costante, ovvero $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T] = \mathbb{E}[\eta]$ $\mathbb{P}$-q.c.. ■

Corollario 34 *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Un'applicazione $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ che preserva la misura è ergodica se e solo se $\forall A, B \in \mathcal{F}$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\mathbb{P}(A \cap B) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A \cap T^{-k}B\right) \right] = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \ . \tag{67}$$

Dimostrazione:

$\Longrightarrow$ Se T è ergodica, per il Teorema di Birkhoff-Khinchin $\forall B \in \mathcal{F}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\mathbf{1}_B + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_B \circ T^k \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\mathbf{1}_B + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{T^{-k}B} \right] = \mathbb{P}(B) \ \mathbb{P}\text{-q.c..} \tag{68}$$

Quindi, per il Teorema di Lebesgue della convergenza dominata,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\mathbb{P}(A \cap B) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A \cap T^{-k}B\right) \right] \qquad (69) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap B}] + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A\cap T^{-k}B}] \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\mathbf{1}_B + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{T^{-k}B} \right) \right] = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \ . \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Posto $A = B \in \mathcal{I}_T, \forall k \geq 1$, si ha $A \cap T^{-k}B = A \cap B = B$. Quindi, la (67) implica $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}^2(B)$, cioè che ogni insieme invariante ha probabilità o zero o uno.

■

Teorema 35 *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ un'applicazione che preserva la misura e $\eta \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Allora,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left| \frac{1}{n} \left[\eta + \sum_{k=1}^{n-1} \eta \circ T^k \right] - \mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T] \right| = 0 \ . \tag{70}$$

Se inoltre T è ergodica $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T] = \mathbb{E}[\eta]$ $\mathbb{P}$-q.c..

Dimostrazione: Siccome $\eta \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0$ e una v.a. $\eta_\varepsilon \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tale che $|\eta_\varepsilon| \leq M_\varepsilon < \infty$ e $\mathbb{E}|\eta - \eta_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Allora, ponendo, per $k = 1, \xi_1 := \eta, \forall k \geq 2$, $\xi_k := \eta \circ T^{k-1}$ e dunque $\forall n \geq 1, S_n := \sum_{k=1}^n \xi_k$ nonché, definendo allo stesso modo S_n^ε, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T]\right| \leq \mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\left[\eta - \eta_\varepsilon + \sum_{k=2}^n \left(\eta \circ T^{k-1} - \eta_\varepsilon \circ T^{k-1}\right)\right]\right| + \\ + \mathbb{E}\left|\frac{S_n^\varepsilon}{n} - \mathbb{E}[\eta^\varepsilon|\mathcal{I}_T]\right| + \mathbb{E}\left|\mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T] - \mathbb{E}[\eta^\varepsilon|\mathcal{I}_T]\right| \ .\end{aligned} \tag{71}$$

Per il Teorema di Birkhoff-Khinchin $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^\varepsilon}{n} = \mathbb{E}[\eta^\varepsilon|\mathcal{I}_T]$ $\mathbb{P}$-q.c. ma, dato che η_ε è limitata, per il Teorema di Lebesgue della convergenza dominata

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\frac{S_n^\varepsilon}{n} - \mathbb{E}[\eta^\varepsilon|\mathcal{I}_T]\right| = 0 \ . \tag{72}$$

Inoltre, $\mathbb{E}\left|\eta \circ T^{k-1} - \eta_\varepsilon \circ T^{k-1}\right| \leq \varepsilon$ come pure

$$|\mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T] - \mathbb{E}[\eta^\varepsilon|\mathcal{I}_T]| = |\mathbb{E}[(\eta - \eta^\varepsilon)|\mathcal{I}_T]| \leq \mathbb{E}[|\eta - \eta^\varepsilon||\mathcal{I}_T] \leq \varepsilon \ . \tag{73}$$

Pertanto, $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T]\right| \leq 2\varepsilon$. Se inoltre T è ergodica, $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{I}_T] = \mathbb{E}[\eta]$ $\mathbb{P}$-q.c.. ■