# Introduzione ai processi di diffusione unidimensionali

Michele Gianfelice

a.a. 2020-2021

# Indice

# Parte I

# Diffusioni di Itô omogenee nel tempo

## 0.1 Proprietà di Markov delle diffusioni di Itô omogenee nel tempo

Un processo stocastico $(X(t), t \in [0,T])$ definito sullo spazio di probabilità filtrato $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$, dove $\Omega := C_0([0,T], \mathbb{R})$ è lo spazio di Banach delle funzioni continue da $[0,T]$ in $\mathbb{R}$ che s'annullano per $t=0$, munito della norma $\|\omega\| := \sup_{t\in[0,T]} |\omega(t)|$, $\mathcal{F}$ è la $\sigma$algebra generata dagli insiemi boreliani di $\Omega$, $\mathbb{P}$ è la misura di Wiener su $\Omega$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ è la filtrazione generata dal moto browniano $(B(t), T \in [0,T])$, che soddisfa l'equazione differenziale stocastica di Itô

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t b(s, X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dB(s) \ , \tag{1}$$

ovvero, in forma differenziale,

$$dX(t) = b(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dB(t) \ ; \ X(0) = X_0 \ , \tag{2}$$

è detto *diffusione di Itô.*

**Definizione 1** *Una diffusione di Itô* $(X(t), t \in \mathbb{R}_+)$ *è detta* omogenea nel tempo *se le funzioni* $b$ *e* $\sigma$ *che compaiono nella (2) non dipendono dalla variabile* $t$ *e soddisfano la diseguaglianza*

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c|x-y| \ , \ x, y \in \mathbb{R} \ , \tag{3}$$

*dove* $c$ *è una costante positiva.*

Notiamo che se una diffusione di Itô $(X(t), t \in \mathbb{R}_+)$ è omogenea nel tempo allora

$$\begin{aligned} X(t+h, X_0) &= X_0 + \int_0^{t+h} b(X(s))\, ds + \int_0^{t+h} \sigma(X(s))\, dB(s) \qquad (4) \\ &= X(t, X_0) + \int_t^{t+h} b(X(s))\, ds + \int_t^{t+h} \sigma(X(s))\, dB(s) \\ &= X(t, X_0) + \int_0^{h} b(X(t+\tau))\, d\tau + \int_0^{h} \sigma(X(t+\tau))\, d\bar{B}(\tau) \end{aligned}$$

dove $\forall \tau \geq 0, \bar{B}(\tau) := B(t+\tau) - B(t)$. Ma

$$X(h, X(t, X_0)) = X(t, X_0) + \int_0^h b(X(s))\, ds + \int_0^h \sigma(X(s))\, dB(s) \tag{5}$$

Quindi, per ogni valore fissato $x$ di $X(t, X_0)$, poiché $d\bar{B}(\tau) \overset{d}{=} dB(s)$, i processi stocastici $(X(t+h, x), h \in \mathbb{R}_+)$ e $(X(h, x), h \in \mathbb{R}_+)$ soddisfano la stessa equazione differeziale stocastica di Itô

$$dX(s) = b(X(s))\, ds + \sigma(X(s))\, dB(s) \ , \ X(0) = x \tag{6}$$

e pertanto sono uguali in distribuzione, cioè per ogni condizione iniziale $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \geq 0, (X(t+h,x), h \in \mathbb{R}_+) \stackrel{d}{=} (X(h,x), h \in \mathbb{R}_+)$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ denotiamo con $\mathbb{P}^x$ la distribuzione di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ indotta da $(X(t,x), t \geq 0)$, ovvero, per ogni insieme cilindrico

$$\{\omega \in \Omega : X(0)(\omega) = x, (X(t_1)(\omega), \cdots, X(t_n)(\omega)) \in B\} \ , \tag{7}$$

dove $n \geq 1, 0 < t_1 < \cdots < t_n, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(0)(\omega) = x, (X(t_1)(\omega), \cdots, X(t_n)(\omega)) \in B\} \\ &\quad = \mathbb{P}^x\{\omega \in \Omega : (X(t_1)(\omega), \cdots, X(t_n)(\omega)) \in B\} \end{aligned} \tag{8}$$

e conseguentemente sia $\mathbb{E}^x$ il corrispondente valore atteso.

**Theorema 2** *Per ogni $t, h > 0$, data una funzione misurabile limitata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}^x[f(X(t+h)) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{X(t,x)}[f(X(h))] \ . \tag{9}$$

Un'idea della dimostrazione segue dalla discussione precedente. Infatti, dalla (5) e dall'unicità della soluzione della (6), si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x[f(X(t+h))] &= \mathbb{E}[f(X(t+h,x))] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X(t+h,x)) | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X(t+h,x)) | X(t,x)]] = \mathbb{E}^{X(t,x)}[f(X(t+h))] \ . \end{aligned} \tag{10}$$

## 0.2 Semigruppo di evoluzione

Definiamo l'operatore $P_t f := \mathbb{E}^{\cdot}[f(X(t))]$ sullo spazio delle funzioni $f$ limitate e misurabili su $\mathbb{R}$ tale che

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x[f(X(t))] = \mathbb{E}[f(X(t,x))] \ . \tag{11}$$

Dal risultato precedente otteniamo

$$\begin{aligned} P_{t+h} f(x) &= \mathbb{E}^x[f(X(t+h))] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X(t+h,x)) | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{X(t,x)}[f(X(h))]\right] = \mathbb{E}[(P_h f)(X(t,x))] \\ &= \mathbb{E}^x[(P_h f)(X(t))] = P_t(P_h f)(x) = P_t \circ P_h f(x) \ ; \end{aligned} \tag{12}$$

si dice allora che la funzione che a $t$ associa l'operatore $P_t$ ha la proprietà di semigruppo: $P_{t+h} = P_t \circ P_h$.

### 0.2.1 Generatore di una diffusione di It*ô ed equazioni di Kolmogorov*

**Definizione 3** *Si definisce* generatore (infinitesimo) *di una diffusione di Itô omogenea nel tempo $(X(t), t \in \mathbb{R}_+)$ l'operatore lineare sullo spazio $C_c^2(\mathbb{R})$ delle funzioni due volte derivabili a supporto compatto così definito*

$$Lf := \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t f - f}{t} \ . \tag{13}$$

**Theorema 4** *Sia* $(X(t), t \in \mathbb{R}_+)$ *una diffusione di Itô omogenea nel tempo che soddisfa la (2). Allora,* $\forall f \in C_c^2(\mathbb{R})$,

$$Lf(x) = \left[ b(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{(dx)^2} \right] f(x) \ . \tag{14}$$

**Dimostrazione.** Data $f \in C_c^2(\mathbb{R})$, applicando il Lemma di Itô al processo $(Y(t), t \in \mathbb{R}_+)$ tale che $\forall t \geq 0, Y(t) := f(X(t))$ otteniamo che questo risolve l'equazione differenziale stocastica di Itô

$$Y(t) = f(X(0)) + \int_0^t \left[ b(X(s))\left(\frac{d}{dx}f\right)(X(s)) + \frac{1}{2}\sigma^2(X(s))\left(\frac{d^2}{(dx)^2}f\right)(X(s)) \right] ds \tag{15}$$

$$+ \int_0^t \sigma(X(s))\left(\frac{d}{dx}f\right)(X(s))\, dB(s) \ .$$

Poiché per definizione $P_t f = \mathbb{E}^{\cdot}[f(X(t))]$, si ha che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x[f(X(t))] = \mathbb{E}[f(X(t,x))] = f(x) + \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^t \left[ b(X(s,x))\left(\frac{d}{dx}f\right)(X(s,x)) + \frac{1}{2}\sigma^2(X(s,x))\left(\frac{d^2}{(dx)^2}f\right)(X(s,x)) \right] ds \right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(X(s,x))\left(\frac{d}{dx}f\right)(X(s,x))\, dB(s)\right] \\ &= f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left[ b(X(s,x))\left(\frac{d}{dx}f\right)(X(s,x)) + \frac{1}{2}\sigma^2(X(s,x))\left(\frac{d^2}{(dx)^2}f\right)(X(s,x)) \right] ds \right] \ .\end{aligned} \tag{16}$$

Pertanto,

$$Lf(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X(t))] - f(x)}{t} = \left[ b(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{(dx)^2} \right] f(x) \ . \tag{17}$$

■

**Esempio 5** *Sia* $(X(t), t \in \mathbb{R}_+)$ *tale che* $\forall t \geq 0, X(t) = x + B(t)$. *Allora, per ogni boreliano* $(a, b]$ *di* $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(t)(\omega) \in (a,b]\} &= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : B(t)(\omega) \in \{y \in \mathbb{R} : y + x \in (a,b]\}\} \\ &= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : B(t)(\omega) \in y \in \mathbb{R} : y \in (a-x, b-x]\} \\ &= \int_{a-x}^{b+x} dy \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} = \int_a^b dy \frac{e^{-\frac{1}{2}(y+x)^2}}{\sqrt{2\pi}} \ .\end{aligned} \tag{18}$$

*Pertanto,*

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x [f(X(t))] = \int_{\mathbb{R}} dy \frac{e^{-\frac{1}{2}(y+x)^2}}{\sqrt{2\pi}} f(y) \ . \tag{19}$$

*Ponendo* $u(t,x) := P_t f(x)$ *questa risolve l'equazione di Fourier su* $\mathbb{R}$ *con dato iniziale* $f(x)$, *ovvero*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} u(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} . \tag{20}$$

Mostriamo che quest'ultima affermazione è vera in generale.

**Theorema 6** *(Equazione di Kolmogorov backward) Data una diffusione di Itô omogenea nel tempo* $(X(t), t \in \mathbb{R}_+)$, *sia* $f \in C_c^2(\mathbb{R})$. *Posto* $u(t,x) := P_t f(x)$ *questa risolve*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = Lu(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} . \tag{21}$$

*Viceversa se* $v \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *è una soluzione limitata di (21) allora questa coincide con* $u$.

**Dimostrazione.** Dimostriamo soltanto la prima affermazione, ovvero che

$$u(t,x) := P_t f(x) = \mathbb{E}^x [f(X(t))] = \mathbb{E}[f(X(t,x))] \tag{22}$$

risolve (21). Posto $g(x) := u(t,x)$, dalla (10) si ha

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}^x [g(X(h))] - g(x)}{h} &= \frac{\mathbb{E}[g(X(h,x))] - g(x)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \mathbb{E}\left[ \mathbb{E}^{X(h,x)} [f(X(t))] \right] - \mathbb{E}^x [f(X(h))] \right\} \\ &= \frac{1}{h} \{ \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X(t,x)) | \mathcal{F}_h]] - \mathbb{E}^x [f(X(h))] \} \\ &= \frac{1}{h} \{ \mathbb{E}[f(X(t+h,x))] - \mathbb{E}^x [f(X(h))] \} \\ &= \frac{1}{h} \{ \mathbb{E}^x [f(X(t+h))] - \mathbb{E}^x [f(X(t))] \} \\ &= \frac{\mathbb{E}^x [f(X(t+h))] - \mathbb{E}^x [f(X(t))]}{h} \\ &= \frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} \underset{h \downarrow 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) \ , \end{aligned} \tag{23}$$

ma d'altronde per la (14)

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x [g(X(h))] - g(x)}{h} = Lg(x) = Lu(t,x) \ . \tag{24}$$

■

In altri termini $\forall f \in C_c^2(\mathbb{R})$ la (21) implica che

$$\partial_t P_t f = L P_t f \ , \tag{25}$$

ma dalla (16) si ha che $P_t f(x) = f(x) + \int_0^t ds P_s L f(x)$ il che implica:

$$\partial_t P_t f = P_t L f \ . \tag{26}$$

Ciò permette di giustificare la scrittura formale "$P_t = e^{tL}$" da cui il termine *generatore* per l'operatore $L$.

Supponiamo che come nel caso del processo di cui all'esempio precedente, $\forall f \in C_c^2(\mathbb{R})$ si possa scrivere

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(X(t))] = \int_{\mathbb{R}} dy p(t,x,y) f(y) \ . \tag{27}$$

Allora, per la definizione di $u(t,x)$, riscrivendo la (26) come $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \mathbb{E}^x[Lf(X(t))]$ utilizzando la (14) e integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} dy p(t,x,y) f(y) = \int_{\mathbb{R}} dy \frac{\partial}{\partial t} p(t,x,y) f(y) \qquad (28)\\
&= \int_{\mathbb{R}} dy p(t,x,y) Lf(y) = \int_{\mathbb{R}} dy p(t,x,y) \left[ b(y)\frac{d}{dy} + \frac{1}{2}\sigma^2(y)\frac{d^2}{(dy)^2}\right] f(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} dy \left[ -\left(\frac{d}{dy}p(t,x,y) b(y)\right) f(y) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dy}p(t,x,y)\sigma^2(y)\right)\frac{d}{dy}f(y)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} dy \left[ -\frac{d}{dy}p(t,x,y) b(y) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{(dy)^2}p(t,x,y)\sigma^2(y)\right] f(y) \ .
\end{aligned}$$

L'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y) = -\frac{d}{dy}p(t,x,y) b(y) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{(dy)^2}p(t,x,y)\sigma^2(y) \tag{29}$$

è detta *equazione di Kolmogorov forward* o *equazione di Fokker-Plank*.

Notiamo che dalla (21) $p(t,x,y)$ soddisfa certamente l'equazione di Kolmogorov backward

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y) = b(x)\frac{d}{dx}p(t,x,y) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{(dx)^2}p(t,x,y) \tag{30}$$

mentre in generale non soddisfa l'equazione di Kolmogorov forward a meno che non si aggiungano delle condizioni di regolarità sulle funzioni $b$ e $\sigma$. Infatti, la (29) può essere riscritta come $\partial_t p(\cdot,x,\cdot) = L^* p(\cdot,x,\cdot)$ dove $L^*$ è l'operatore aggiunto di $L$, ovvero tale che, indicando con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R},dx)$, per ogni $f,g \in C_c^2(\mathbb{R})$ limitate, $\langle g, Lf\rangle = \langle L^* g, f\rangle$. Dunque, in generale la soluzione di (29) esiste in senso debole. Inoltre per poter individuare la funzione

$p$ che soddisfa le equazioni di Kolmogorov è necessario aggiungere la condizione iniziale. Dalla (27) si ottiene che per ogni funzione misurabile e limitata su $\mathbb{R}$,

$$u(0,x) = \int_{\mathbb{R}} dy p(0,x,y) f(y) = \mathbb{E}^x [f(X(0))] = f(x) \ , \tag{31}$$

ovvero che $p(0,x,y)$ è la distribuzione *delta di Dirac* $\delta(x-y)$.

Ponendo in (29) $\forall y \in \mathbb{R}, f = \mathbf{1}_{(-\infty,y]}$ otteniamo

$$\mathbb{E}^x \left[ \mathbf{1}_{(-\infty,y]} (X(t)) \right] = \mathbb{P} \{ \omega \in \Omega : X(t,x) \leq y \} =: F(t,x,y) \ , \tag{32}$$

ovvero la probabilità che il processo $(X(s), s \in \mathbb{R}_+)$ che a $s=0$ assume il valore $X(0) = x$ raggiunga al tempo $s = t$ un valore $X(t) \leq y$. Pertanto $p(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F(t,x,y)$ ovvero $p(t,x,y)$ è la densità della distribuzione di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tale che, per ogni boreliano $(a,b]$,

$$P_t^x(a,b] := F(t,x,b) - F(t,x,a) \ . \tag{33}$$

Ciò spiega il perché della giustapposizione gli aggettivi *backward* (all'indietro) e *forward* (in avanti) al nome Kolmogorov per indicare le equazioni (30) e (29). Infatti, il primo deriva dal fatto che in (30) si deriva rispetto alla condizione iniziale, mentre il secondo deriva del fatto che in (29) si deriva rispetto al punto di arrivo del processo al tempo $t$.

## 0.3 Misura stazionaria

Riscrivendo la (29) nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t,x,y) + \frac{d}{dy} \left[ p(t,x,y) b(y) - \frac{1}{2} \frac{d}{dy} p(t,x,y) \sigma^2(y) \right] = 0 \tag{34}$$

notiamo che questa rappresenta l'equazione di continuità (o di conservazione della massa) di un fluido (in questo caso unidimensionale) che al tempo $s = 0$ è concentrato nel punto $x$ e che fluisce con flusso infinitesimo (corrente)

$$j(t,x,y) := p(t,x,y) b(y) - \frac{1}{2} \frac{d}{dy} p(t,x,y) \sigma^2(y) \ . \tag{35}$$

Più propriamente, se la condizione iniziale $X_0$ in (2) è aleatoria con distribuzione di probabilità $\mu$, ponendo

$$\rho(t,y) := \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) p(t,x,y) \tag{36}$$

dalla (34) otteniamo che $\rho$ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t,y) + \frac{d}{dy} \left[ \rho(t,y) b(y) - \frac{1}{2} \frac{d}{dy} \rho(t,y) \sigma^2(y) \right] = 0 \tag{37}$$

che è l'equazione di conservazione della massa: $\partial_t \rho + \operatorname{div} j = 0$ di un fluido (unidimensionale) di massa totale pari a 1.

**Definizione 7** *Una misura* stazionaria *per una diffusione di Itô omogenea nel tempo è una misura di probabilità $\nu$ su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ della condizione iniziale $X_0$ tale che che per ogni $f$ limitata e misurabile su $\mathbb{R}$*

$$\nu\left[\mathbb{E}^{\cdot}\left[f\left(X\left(t\right)\right)\right]\right]=\nu\left[f\right]\ . \tag{38}$$

Ovvero, se la condizione iniziale $X_0$ ha distribuzione di probabilità $\nu$ allora $\forall t \geq 0$, la distribuzione di probabilità della v.a. $X(t)$ sarà sempre pari a $\nu$.

In particolare se vale la (27) e $\nu$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, posto $\nu(dx) = \varphi(x)\, dx$ e sostituendo $\nu(dx)$ a $\mu(dx)$ in (36) dalla definizione di misura stazionaria (38) si ha

$$\rho\left(t,x\right)=\int dx\varphi\left(x\right)p\left(t,x,y\right)=\varphi\left(y\right) \tag{39}$$

che sostituita nella (37) implica che la densità $\varphi$ della misura invariante $\nu$ soddisfa l'equazione

$$\frac{d}{dy}\left[\varphi\left(y\right)b\left(y\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\varphi\left(y\right)\sigma^{2}\left(y\right)\right]=0\ . \tag{40}$$

**Esempio 8** *Consideriamo il processo di* Ornstein-Uhlembeck

$$dX\left(t\right)=-\alpha X\left(t\right)dt+\sigma dB\left(t\right)\ , \tag{41}$$

*con $\alpha, \sigma > 0$. L'equazione cui soddisfa la densità stazionaria $\varphi$ è*

$$\frac{d}{dy}\left[\varphi\left(y\right)\alpha y+\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\varphi\left(y\right)\sigma^{2}\right]=0 \tag{42}$$

*ovvero*

$$\varphi\left(y\right)\alpha y+\frac{1}{2}\sigma^{2}\left(\frac{d}{dy}\varphi\right)\left(y\right)=c_{1} \tag{43}$$

*con $c_1 \in \mathbb{R}$. Ponendo $\varphi(y) = \psi(y)\, e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2}y^2}$ nella precedente equazione ottenenia-mo*

$$\left(\frac{d}{dy}\psi\right)\left(y\right)e^{-\frac{\alpha}{\sigma^{2}}y^{2}}=c_{1}\ . \tag{44}$$

*Pertanto,*

$$\psi\left(y\right)=\int_{0}^{y}dze^{\frac{\alpha}{\sigma^{2}}z^{2}}+c_{2}\ , \tag{45}$$

*$c_2 \in \mathbb{R}$ e*

$$\varphi\left(y\right)=c_{1}e^{-\frac{\alpha}{\sigma^{2}}y^{2}}\int_{0}^{y}dze^{\frac{\alpha}{\sigma^{2}}z^{2}}+c_{2}e^{-\frac{\alpha}{\sigma^{2}}y^{2}}\ . \tag{46}$$

*Poiché $\varphi$ è una densità di probabilità dev'essere non negativa $dx$-q.c. e integrabile, perciò $c_1 = 0$ e $c_2 > 0$. Inoltre poiché $\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) = 1, c_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi\sigma^2}}$. Dunque*

$$\varphi\left(y\right)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi\sigma^{2}}}e^{-\frac{\alpha}{\sigma^{2}}y^{2}}\ . \tag{47}$$