Appunti utili per gli esercizi sugli integrali stocastici

Michele Gianfelice

a.a. 2011/2012

1 Integrale di Itô

Consideriamo lo spazio di probabilità filtrato $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ dove: $\Omega := C_0([0,T], \mathbb{R})$ è lo spazio di Banach delle funzioni continue da $[0,T]$ in $\mathbb{R}$ che s'annullano per $t = 0$, munito della norma $\|\omega\| := \sup_{t\in[0,T]} |\omega(t)|$, $\mathcal{F}$ è la σalgebra generata dagli insiemi boreliani di Ω, $\mathbb{P}$ è la misura di Wiener su Ω e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ è la filtrazione generata dal moto browniano. Sia $C\left([0,T], L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\right)$ lo spazio di Banach delle funzioni continue da $[0,T]$ a valori in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ munito della norma $\|F\|_\infty := \sup_{t\in[0,T]} \|F(t)\|_2$, dove $\|G\|_2 := \sqrt{\int_\Omega \mathbb{P}(d\omega) |G(\omega)|^2}$, e $C_{ad}\left([0,T], L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\right)$ il sottospazio chiuso di $C\left([0,T]; L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\right)$ i cui elementi sono adattati alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, ovvero tali che $\forall t \in [0,T]$ appartengono a $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Allora, data $F \in C_{ad}\left([0,T], L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\right)$, per ogni partizione $\sigma := \{0 = t_0 < ... < t_{n_\sigma} = T\}$ di diametro $|\sigma|$, posto

$$\Omega \ni \omega \longmapsto I_\sigma(F)(\omega) := \sum_{i=0}^{n_\sigma} F(t_{i-1}, \omega)\left(B(t_i, \omega) - B(t_{i-1}, \omega)\right) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \tag{1}$$

il limite per $|\sigma| \downarrow 0$ di $I_\sigma(F)$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è detto *integrale di Itô* di F e si denota $\int_0^T F(s)\, dB(s)$.

Inoltre si ha che

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T F(s)\, dB(s)\right] = 0 \ , \tag{2}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T F(s)\, dB(s)\right)^2\right] = \int_0^T ds \|F(s)\|_2^2 \ , \tag{3}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t F(u)\, dB(u)\right)\left(\int_0^s F(u)\, dB(u)\right)\right] = \int_0^{t\wedge s} du \|F(u)\|_2^2 \ , \ s,t \in [0,T] \ . \tag{4}$$

Se in particolare $F = f \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ allora vale la consueta formula d'integrazione per parti, ovvero

$$\int_0^T f(s)\, dB(s) = f(t) B(t) - \int_0^T ds f'(s) B(s) \tag{5}$$

che è utile per calcolare valore atteso e covaranza del processo stocastico $Z(t) = \int_0^t ds g(s) B(s)$, dove

$t \in [0,T]$ e $g \in C([0,T],\mathbb{R})$. Infatti, se $G(t)$ è la primitiva di g,

$$Z(t) = G(t)\,B(t) - \int_0^t G(s)\,dB(s) \tag{6}$$

da cui segue $\mathbb{E}[Z(t)] = 0$. Inoltre,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z(t)\,Z(s)] &= \mathbb{E}\left[\left(G(t)\,B(t) - \int_0^t G(u)\,dB(u)\right)\left(G(s)\,B(s) - \int_0^s G(u)\,dB(u)\right)\right] \\ &= G(t)\,G(s)\,(t\wedge s) - G(s)\,\mathbb{E}\left[B(s)\int_0^t G(u)\,dB(u)\right] + \\ &\quad - G(t)\,\mathbb{E}\left[B(t)\int_0^s G(u)\,dB(u)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t G(u)\,dB(u)\right)\left(\int_0^s G(u)\,dB(u)\right)\right] \ .\end{aligned} \tag{7}$$

Ma,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t G(u)\,dB(u)\right)\left(\int_0^s G(u)\,dB(u)\right)\right] = \int_0^{t\wedge s} du\,|G(u)|^2 \tag{8}$$

e, usando la (1),

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[B(s)\int_0^t G(u)\,dB(u)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left[B(s\wedge t) + (B(s) - B(s\wedge t))\right]\left[\int_0^{t\wedge s} G(u)\,dB(u) + \int_{t\wedge s}^t G(u)\,dB(u)\right]\right] \\ &= \int_0^{t\wedge s} du G(u) \ .\end{aligned} \tag{9}$$

Quindi,

$$\mathbb{E}[Z(t)\,Z(s)] = G(t)\,G(s)\,(t\wedge s) + \int_0^{t\wedge s} du\,|G(u)|^2 - (G(t) + G(s))\int_0^{t\wedge s} du G(u) \ . \tag{10}$$

2 Equazioni differenziali stocastiche di Itô lineari

Un processo stocastico $X(t)$ *guidato* dal moto browniano è soluzione di un equazione differenziale stocastica di Itô se esistono:

- una funzione $[0,t] \times \mathbb{R} \ni (s,x) \longmapsto a(s,x) \in \mathbb{R}$ Riemann integrabile in entrambi gli argomenti;
- una funzione $b \in C_{ad}\left([0,T], L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\right)$;
- una v.a. X_0;

tali che

$$X(t) = X_0 + \int_0^t ds a(s, X(s)) + \int_0^t b(s, X(s))\,dB(s) \ . \tag{11}$$

In forma differenziale la precedente equazione si scrive

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))\, dt + b(t, X(t))\, dB(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} . \tag{12}$$

Nel caso in cui esistano $c_1, c_2, \sigma_1, \sigma_2 \in C([0, t])$ tali che

$$a(s, x) = c_1(s)\, x + c_2(s) \;\; ; \;\; a(s, x) = \sigma_1(s)\, x + \sigma_2(s) \;\; , \tag{13}$$

l'equazione (11) è detta lineare e si ha

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds \left[c_1(s)\, X(s) + c_2(s)\right] + \int_0^t \left[\sigma_1(s)\, X(s) + \sigma_2(s)\right] dB(s) \;\; . \tag{14}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} dX(t) = \left[c_1(t)\, X(t) + c_2(t)\right] dt + \left[\sigma_1(t)\, X(t) + \sigma_2(t)\right] dB(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} . \tag{15}$$

2.0.1 Calcolo di $\mathbb{E}[X(t, X_0)]$

Ponendo $\mu_X(t) := \mathbb{E}[X(t, X_0)]$, per la (2), prendendo il valore atteso di entrambi i membri della (14) e derivando rispetto a t si ha che μ_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mu_X(t) = c_1(t)\, \mu_X(t) + c_2(t) \\ \mu_X(0) = \mathbb{E}[X_0] \end{cases} . \tag{16}$$

ovvero

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X_0] + \int_0^t ds c_2(s)\, e^{\int_s^t d\tau c_1(\tau)} \;\; . \tag{17}$$

2.0.2 Calcolo della varianza di $X(t, X_0)$

Sia $Y(t) := f(t, X(t)) = X^2(t)$. Calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} dY(t) = X_0^2 &+ \int_0^t ds \left\{2X(s)\left[c_1(s)\, X(s) + c_2(s)\right] + \left[\sigma_1(s)\, X(s) + \sigma_2(s)\right]^2\right\} \\ &+ \int_0^t 2X(s)\left[\sigma_1(s)\, X(s) + \sigma_2(s)\right] dB(s) \;\; . \end{aligned} \tag{18}$$

Ponendo $q_X(t) := \mathbb{E}[Y(t, Y_0)] = \mathbb{E}\left[X^2(t, X_0)\right]$, per la (2), prendendo il valore atteso di entrambi i membri della (18) e derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_X(t) = b_1(t)\, q_X(t) + b_2(t) \\ q_X(0) = \mathbb{E}\left[X_0^2\right] \end{cases} . \tag{19}$$

ovvero

$$q_X(t) = \mathbb{E}\left[X_0^2\right] + \int_0^t ds b_2(s)\, e^{\int_s^t d\tau b_1(\tau)} \;\; , \tag{20}$$

dove

$$b_1(t) := 2c_1(t) + \sigma_1^2(t) \ , \tag{21}$$

$$b_2(t) := 2\left[c_2(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)\right]\mu_X(t) + \sigma_2^2(t) \ . \tag{22}$$

La varianza di $X(t, X_0)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2(t, X_0)\right] - \mathbb{E}^2\left[X(t, X_0)\right] = q_X(t) - \mu_X^2(t) \ . \tag{23}$$

2.1 Rumore additivo

Consideriamo il caso in cui $\sigma_1 = 0$. Dalla (14) segue

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds\left[c_1(s)X(s) + c_2(s)\right] + \int_0^t \sigma_2(s)\,dB(s) \ , \tag{24}$$

$$dX(t) = \left[c_1(t)X(t) + c_2(t)\right]dt + \sigma_2(t)\,dB(t) \ . \tag{25}$$

Ponendo

$$Y(t) = f(t, X(t)) := e^{-\int_0^t ds c_1(s)}X(t) \tag{26}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$df(t, X(t)) = \left[(\partial_t f)(t, X(t)) + \left[c_1(t)X(t) + c_2(t)\right](\partial_x f)(t, X(t)) + \frac{1}{2}\sigma_2^2(t)\left(\partial_{xx}^2 f\right)(t, X(t))\right]dt + \tag{27}$$

$$+ \sigma_2(t)(\partial_x f)(t, X(t))\,dB(t) \ .$$

Ovvero, poiché $f(t, x) = xe^{-\int_0^t ds c_1(s)}$, e

$$\partial_t f(t, x) = -c_1(t) f(t, x) \ , \tag{28}$$

$$\partial_x f(t, x) = \frac{f(t, x)}{x} \ , \tag{29}$$

$$\partial_{xx}^2 f(t, x) = 0 \ , \tag{30}$$

si ha

$$dY(t) = c_2(t)\,e^{-\int_0^t ds c_1(s)}dt + \sigma_2(t)\,e^{-\int_0^t ds c_1(s)}dB(t) \tag{31}$$

ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds c_2(s)\,e^{-\int_0^s d\tau c_1(\tau)} + \int_0^t \sigma_2(s)\,e^{-\int_0^s d\tau c_1(\tau)}dB(s) \ , \tag{32}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= e^{\int_0^t ds c_1(s)}Y(t, X_0) \\ &= e^{\int_0^t ds c_1(s)}\left[X_0 + \int_0^t ds c_2(s)\,e^{-\int_0^s d\tau c_1(\tau)} + \int_0^t \sigma_2(s)\,e^{-\int_0^s d\tau c_1(\tau)}dB(s)\right] \\ &= X_0 e^{\int_0^t ds c_1(s)} + \int_0^t ds c_2(s)\,e^{\int_s^t d\tau c_1(\tau)} + \int_0^t \sigma_2(s)\,e^{\int_s^t d\tau c_1(\tau)}dB(s) \ . \end{aligned} \tag{33}$$

Se $c_2 = 0$ e $c_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ la (24) è detta equazione di *Langevin* ed il processo stocastico che ne è soluzione, se $X_0 \in \mathbb{R}$,

$$X(t, X_0) = e^{\int_0^t ds c_1(s)} Y(t, X_0) = X_0 e^{c_1 t} + \sigma_2 \int_0^t e^{c_1(t-s)} dB(s)$$

è detto di *Ornstein-Uhlembeck*.

Il valore atteso di $X(t, X_0)$ vale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t, X_0)] &= e^{\int_0^t ds c_1(s)} \mathbb{E}[X_0] + \int_0^t ds c_2(s) e^{\int_s^t d\tau c_1(\tau)} + \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma_2(s) e^{\int_s^t d\tau c_1(\tau)} dB(s)\right] \\ &= e^{\int_0^t ds c_1(s)} \mathbb{E}[X_0] + \int_0^t ds c_2(s) e^{\int_s^t d\tau c_1(\tau)} \ . \end{aligned} \tag{34}$$

La funzione di covarianza risulta

$$\begin{aligned} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &:= \mathbb{E}[(X(t, X_0) - \mathbb{E}[X(t, X_0)])(X(s, X_0) - \mathbb{E}[X(s, X_0)])] \\ &= \mathbb{E}[X(t, X_0) X(s, X_0)] - \mathbb{E}[X(t, X_0)] \mathbb{E}[X(s, X_0)] \ . \end{aligned} \tag{35}$$

Nel caso in cui $X_0 = \mathbb{E}[X_0]$, ponendo $y(t) := e^{\int_0^t ds c_1(s)}$, si ha

$$\begin{gathered} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] = \\ y(t) y(s) \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \frac{\sigma_2(\tau)}{y(\tau)} dB(\tau)\right)\left(\int_0^s \frac{\sigma_2(\tau)}{y(\tau)} dB(\tau)\right)\right] = \\ y(t) y(s) \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge s} \frac{\sigma_2(\tau)}{y(\tau)} dB(\tau)\right)^2 + \left(\int_0^{t\wedge s} \frac{\sigma_2(\tau)}{y(\tau)} dB(\tau)\right)\left(\int_{t\wedge s}^{t\vee s} \frac{\sigma_2(\tau)}{y(\tau)} dB(\tau)\right)\right] = \\ y(t) y(s) \left[\int_0^{t\wedge s} \left(\frac{\sigma_2(\tau)}{y(\tau)}\right)^2 d\tau\right] \end{gathered} \tag{36}$$

che, nel caso del processo di Ornstein-Uhlembeck, vale

$$Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] = \frac{\sigma_2^2}{2c_1}\left(e^{c_1(t+s)} - e^{c_1(t\vee s - t\wedge s)}\right) = \frac{\sigma_2^2}{2c_1}\left(e^{c_1(t+s)} - e^{c_1|t-s|}\right) \ . \tag{37}$$

2.2 Rumore moltiplicativo

2.2.1 Equazione lineare omogenea

Consideriamo il caso in cui nella (14) $c_2 = \sigma_2 = 0$.

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds c_1(s) X(s) + \int_0^t \sigma_1(s) X(s) dB(s) \ , \tag{38}$$

$$dX(t) = c_1(t) X(t) dt + \sigma_1(t) X(t) dB(t) \ . \tag{39}$$

Se $X_0 = 0$, allora $X(t, X_0) = 0$ per ogni $t > 0$. Suppononiamo allora che $X_0 \neq 0$. Ponendo

$$Y(t) := f\left(\frac{X(t)}{X_0}\right) = \log \frac{X(t)}{X_0} \ , \tag{40}$$

poiché

$$d\frac{X(t)}{X_0} = c_1(t)\frac{X(t)}{X_0}dt + \sigma_1(t)\frac{X(t)}{X_0}dB(t) \tag{41}$$

e

$$\partial_t f(t,x) = 0 \ , \tag{42}$$

$$\partial_x f(t,x) = \frac{X_0}{x} \ , \tag{43}$$

$$\partial^2_{xx} f(t,x) = -\frac{X_0}{x^2} \ , \tag{44}$$

calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$dY(t) = \left[c_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(t)\right]dt + \sigma_1(t)\,dB(t) \ , \tag{45}$$

$$Y(t) = \int_0^t ds\left[c_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right] + \int_0^t \sigma_1(s)\,dB(s) \ . \tag{46}$$

Dunque,

$$X(t,X_0) = X_0 e^{Y(t)} = X_0 \exp\left\{\int_0^t ds\left[c_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right] + \int_0^t \sigma_1(s)\,dB(s)\right\} \ . \tag{47}$$

Nel caso in cui c_1, σ_1 e X_0 siano costanti,

$$X(t,X_0) = X_0 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \sigma_1 B(t)} \tag{48}$$

è detto *moto browniano geometrico*.

In questo caso, ricordando che se X è una v.a. normale standard e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$, poiché $B(t) \overset{d}{=} \sqrt{t}B(1)$ con $B(1) \in N(0,1)$, si ha

$$\mathbb{E}\left[X(t,X_0)\right] = \mathbb{E}\left[X_0 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \sigma_1\sqrt{t}B(1)}\right] = X_0 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \frac{\sigma_1^2 t}{2}} \ , \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(X(t,X_0)\right)\left(X(s,X_0)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[X_0^2 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(t+s) + \sigma_1(B(t)+B(s))}\right] &(50)\\
&= X_0^2 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(t+s)}\mathbb{E}\left[e^{\sigma_1(B(t\vee s) - B(t\wedge s) + 2B(t\wedge s))}\right] \\
&= X_0^2 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(t+s)}\mathbb{E}\left[e^{\sigma_1(B(t\vee s) - B(t\wedge s))}\right]\mathbb{E}\left[e^{2\sigma_1 B(t\wedge s)}\right] &(51)\\
&= X_0^2 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(t+s)}\mathbb{E}\left[e^{\sigma_1\sqrt{|t-s|}B(1)}\right]\mathbb{E}\left[e^{2\sigma_1\sqrt{t\wedge s}B(1)}\right] &(52)\\
&= X_0^2 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(t+s)} e^{\frac{\sigma_1^2(|t-s| + 4t\wedge s)}{2}} \ . &(53)
\end{aligned}$$

Ovvero, la funzione di covarianza del moto browniano geometrico risulta

$$\begin{aligned}
Cov\left[X(t,X_0), X(s,X_0)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(X(t,X_0)\right)\left(X(s,X_0)\right)\right] - \mathbb{E}\left[X(t,X_0)\right]\mathbb{E}\left[X(s,X_0)\right] &(54)\\
&= X_0^2 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(t+s)}\left[e^{\frac{\sigma_1^2(|t-s| + 4t\wedge s)}{2}} - e^{\frac{\sigma_1^2(t+s)}{2}}\right] \ .
\end{aligned}$$

2.3 Equazione lineare generale

Il Lemma di Itô può essere esteso a funzioni $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \ni (t,x,y) \longmapsto f(t,x,y) \in \mathbb{R}$ con derivate del primo ordine in t e del secondo ordine in x e y continue. In particolare, se $f(t,x,y) = xy$, dati i processi stocastici di Itô

$$X(t) = X_0 + \int_0^t ds a(s, X(s)) + \int_0^t b(s, X(s)) dB(s) \ , \tag{55}$$

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t ds c(s, Y(s)) + \int_0^t d(s, Y(s)) dB(s) \ , \tag{56}$$

si ha

$$\begin{aligned} d(X(t)Y(t)) &= X(t) dY(t) + Y(t) dX(t) + b(t, X(t)) d(t, Y(t)) dt \\ &= [c(t, Y(t)) X(t) + a(t, X(t)) Y(t) + b(t, X(t)) d(t, Y(t))] dt + \\ &+ [d(t, Y(t)) X(t) + b(t, X(t)) Y(t)] dB(t) \ . \end{aligned} \tag{57}$$

Ciò premesso sia

$$X(t) = X_0 + \int_0^t ds [c_1(s) X(s) + c_2(s)] + \int_0^t [\sigma_1(s) X(s) + \sigma_2(s)] dB(s) \ . \tag{58}$$

Considerando l'equazione omogenea associata con dato iniziale $Y(0) = 1$,

$$Y(t) := 1 + \int_0^t c_1(s) Y(s) ds + \int_0^t \sigma_1(s) Y(s) dB(s) \ , \tag{59}$$

sia

$$U(t) = f(t, Y(t)) := \frac{1}{Y(t)} \ . \tag{60}$$

Il differenziale di Itô di $U(t)$ risulta quindi essere

$$\begin{aligned} df(t, Y(t)) &= \left[(\partial_t f)(t, Y(t)) + c_1(t) Y(t) (\partial_x f)(t, Y(t)) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(t) Y^2(t) \left(\partial_{xx}^2 f\right)(t, Y(t)) \right] dt + \\ &+ \sigma_1(t) Y(t) (\partial_x f)(t, Y(t)) dB(t) \\ &= \left[(\partial_t f)(t, Y(t)) + c_1(t) \frac{(\partial_x f)(t, Y(t))}{f(t, Y(t))} + \frac{1}{2}\sigma_1^2(t) \frac{\left(\partial_{xx}^2 f\right)(t, Y(t))}{f^2(t, Y(t))} \right] dt + \\ &+ \sigma_1(t) \frac{(\partial_x f)(t, Y(t))}{f(t, Y(t))} dB(t) \ . \end{aligned} \tag{61}$$

Ovvero, poiché $f(t,x) = \frac{1}{x}$, dunque

$$\partial_t f(t,x) = 0 \ , \tag{62}$$

$$\partial_x f(t,x) = -f^2(t,x) \ , \tag{63}$$

$$\partial_{xx}^2 f(t,x) = 2f^3(t,x) \ , \tag{64}$$

si ha

$$dU\left(t\right) = \left[-c_1\left(t\right) + \sigma_1^2\left(t\right)\right] U\left(t\right) dt - \sigma_1\left(t\right) U\left(t\right) dB\left(t\right) \ . \tag{65}$$

Calcolando il differenziale di Itô di $X\left(t\right) U\left(t\right)$, dalle (57), (14) e (65) si ottiene

$$\begin{aligned} d\left(X\left(t\right) U\left(t\right)\right) &= \left[\left(c_1\left(t\right) X\left(t\right) + c_2\left(t\right)\right) U\left(t\right) + \left(-c_1\left(t\right) + \sigma_1^2\left(t\right)\right) X\left(t\right) U\left(t\right) + \right. \\ &\quad \left. - \left(\sigma_1\left(t\right) X\left(t\right) + \sigma_2\left(t\right)\right) \sigma_1\left(t\right) U\left(t\right)\right] dt + \\ &\quad + \left[\left(\sigma_1\left(t\right) X\left(t\right) + \sigma_2\left(t\right)\right) U\left(t\right) - \sigma_1\left(t\right) X\left(t\right) U\left(t\right)\right] dB\left(t\right) \\ &= \left[c_2\left(t\right) - \sigma_2\left(t\right) \sigma_1\left(t\right)\right] U\left(t\right) dt + \sigma_2\left(t\right) U\left(t\right) dB\left(t\right) \ . \end{aligned} \tag{66}$$

Perciò, per la (60) si ha $X\left(0\right) U\left(0\right) = X_0$ e

$$X\left(t, X_0\right) = Y\left(t\right) \left\{X_0 + \int_0^t \frac{c_2\left(s\right) - \sigma_2\left(s\right) \sigma_1\left(s\right)}{Y\left(s\right)} ds + \int_0^t \frac{\sigma_2\left(s\right)}{Y\left(s\right)} dB\left(s\right)\right\} \ , \tag{67}$$

dove dalla (47)

$$Y\left(t\right) = \exp\left[\int_0^t ds \left[c_1\left(s\right) - \frac{1}{2}\sigma_1^2\left(s\right)\right] + \int_0^t \sigma_1\left(s\right) dB\left(s\right)\right] \ . \tag{68}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} X\left(t, X_0\right) &= X_0 e^{\int_0^t ds\left[c_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right] + \int_0^t \sigma_1(s) dB(s)} + \\ &\quad + \int_0^t \left(c_2\left(s\right) - \sigma_2\left(s\right) \sigma_1\left(s\right)\right) e^{\int_s^t d\tau\left[c_1(\tau) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\tau)\right] + \int_s^t \sigma_1(\tau) dB(\tau)} ds + \\ &\quad + \int_0^t \sigma_2\left(s\right) e^{\int_s^t d\tau\left[c_1(\tau) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\tau)\right] + \int_s^t \sigma_1(\tau) dB(\tau)} dB\left(s\right) \ . \end{aligned} \tag{69}$$

3 Equazioni differenziali stocastiche di Itô non lineari

3.1 Equazioni differenziali stocastiche di Itô non lineari con termine di rumore lineare

Consideriamo qui di seguito alcune classi di equazioni differenziali stocastiche non lineari per cui è possibile, in certi casi, trovare una soluzione esplicita.

3.1.1 Rumore additivo

Consideriamo l'equazione della forma

$$X\left(t, X_0\right) = X_0 + \int_0^t a\left(s, X\left(s\right)\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s\right) dB\left(s\right) \ . \tag{70}$$

Ponendo

$$Y\left(t\right) := \int_0^t \sigma\left(s\right) dB\left(s\right) \ , \tag{71}$$

e $Z(t,X_0)$ la soluzione di

$$\begin{cases} dZ(t) = a(t, Z(t) + Y(t))\, dt \\ Z(0) = X_0 \end{cases} , \tag{72}$$

si ha

$$X(t,X_0) = Z(t,X_0) + Y(t) \ . \tag{73}$$

Infatti, il differenziale di Itô di quest'ultima espressione risulta

$$\begin{aligned} dX(t) &= dZ(t) + dY(t) = a(t, Z(t) + Y(t))\, dt + \sigma(t)\, dB(t) \\ &= a(t, X(t))\, dt + \sigma(t)\, dB(t) \ . \end{aligned} \tag{74}$$

Esempio 1 *Se $a(t,x) := e^{-x}$ e $\sigma(t) := \sigma$, dalla (70) si ottiene $Y(t) = \sigma B(t)$ e*

$$\begin{cases} dZ(t) = e^{-Z(t)-\sigma B(t)} dt \\ Z(0) = X_0 \end{cases} , \tag{75}$$

ovvero

$$\begin{cases} e^{Z(t)} dZ(t) = e^{-\sigma B(t)} dt \\ Z(0) = X_0 \end{cases} , \tag{76}$$

cioè

$$e^{Z(t)} - e^{X_0} = \int_0^t ds e^{-\sigma B(s)} \ , \tag{77}$$

$$Z(t,X_0) = \log\left[e^{X_0} + \int_0^t ds e^{-\sigma B(s)}\right] \ . \tag{78}$$

Dunque, dalla (73),

$$X(t,X_0) = \log\left[e^{X_0} + \int_0^t ds e^{-\sigma B(s)}\right] + \sigma B(t) \ . \tag{79}$$

3.1.2 Rumore moltiplicativo

Consideriamo l'equazione della forma

$$X(t,X_0) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, X(s)\, dB(s) \ . \tag{80}$$

Ponendo

$$Y(t) := 1 + \int_0^t \sigma(s)\, Y(s)\, dB(s) \ , \tag{81}$$

sia

$$U(t) := \frac{1}{Y(t)} \ . \tag{82}$$

Il differenziale di Itô di $U(t)$ risulta quindi essere dalla (65)

$$dU(t) = \sigma^2(t)\, U(t)\, dt - \sigma(t)\, U(t)\, dB(t) \ . \tag{83}$$

Calcolando il differenziale di Itô di $Z(t) := X(t)U(t)$, si ottiene

$$dZ(t) = d(X(t)U(t)) = U(t)\,a\left(t, \frac{Z(t)}{U(t)}\right)dt = \frac{a(t, Z(t)Y(t))}{Y(t)}dt \ . \tag{84}$$

Poiché dalla (47), con $c_1 = 0, \sigma_1 = \sigma$ e dato iniziale uguale a 1, si ha

$$Y(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dB(s)\right] \ , \tag{85}$$

e siccome $Z(0) = X(0)U(0) = X_0, Z(t)$ risolve

$$\begin{cases} dZ(t) = \frac{a\left(t, Z(t)e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)}\right)}{e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)}}dt \\ Z(0) = X_0 \end{cases} . \tag{86}$$

Dunque,

$$X(t, X_0) = Y(t)Z(t, X_0) = Z(t, X_0)\,e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)} \tag{87}$$

Esempio 2 *Se $a(t,x) := \frac{1}{x}$ e $\sigma(t) := \sigma$, dalla (86) si ottiene*

$$\begin{cases} dZ(t) = \frac{1}{Z(t)e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B(t)}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t)}}dt \\ Z(0) = X_0 \end{cases} , \tag{88}$$

ovvero

$$\begin{cases} Z(t)\,dZ(t) = e^{\sigma^2 t - 2\sigma B(t)}dt \\ Z(0) = X_0 \end{cases} , \tag{89}$$

cioè

$$\frac{Z(t)^2 - X_0^2}{2} = \int_0^t e^{\sigma^2 s - 2\sigma B(s)}ds \ , \tag{90}$$

$$Z(t, X_0) = \sqrt{X_0^2 + 2\int_0^t e^{\sigma^2 s - 2\sigma B(s)}ds} \ . \tag{91}$$

Quindi, dalla (87),

$$X(t, X_0) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B(t)}\sqrt{X_0^2 + 2\int_0^t e^{\sigma^2 s - 2\sigma B(s)}ds} \ . \tag{92}$$

3.1.3 Rumore lineare

Consideriamo l'equazione della forma

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s))\,ds + \int_0^t [\sigma_1(s)X(s) + \sigma_2(s)]\,dB(s) \ . \tag{93}$$

Come nel caso di rumore moltiplicativo poniamo

$$Y(t) := 1 + \int_0^t \sigma_1(s)Y(s)\,dB(s) \ , \ U(t) := \frac{1}{Y(t)} \ ; \tag{94}$$

perciò

$$dU(t) = \sigma_1^2(t)\,U(t)\,dt - \sigma_1(t)\,U(t)\,dB(t)\ . \tag{95}$$

Calcolando il differenziale di Itô di $Z(t) := X(t)\,U(t)$, siccome $Z(0) = X(0)\,U(0) = X_0$, si ottiene

$$\begin{cases} dZ(t) = \left\{U(t)\left[a\left(t, \frac{Z(t)}{U(t)}\right) - \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\right]\right\}dt + \sigma_2(t)\,U(t)\,dB(t) \\ Z(0) = X_0 \end{cases}, \tag{96}$$

dove per definizione, dalla (85),

$$U(t) = \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_1^2(s)\,ds - \int_0^t \sigma_1(s)\,dB(s)\right]\ . \tag{97}$$

Ma la (96) è la forma differenziale di un equazione del tipo (70); pertanto, ponendo

$$V(t) := \int_0^t \sigma_2(s)\,U(s)\,dB(s)\ , \tag{98}$$

$$Z(t) = V(t) + W(t)\ , \tag{99}$$

dove $W(t)$ risolve

$$\begin{cases} dW(t) = \left\{U(t)\left[a\left(t, \frac{V(t)+W(t)}{U(t)}\right) - \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\right]\right\}dt \\ W(0) = Z(0) = X_0 \end{cases}. \tag{100}$$

Ponendo

$$\bar{W}(t) = f(t, W(t)) := W(t) + \int_0^t ds\sigma_1(s)\,\sigma_2(s)\,U(s) \tag{101}$$

e calcolandone il differenziale di Itô (che in questo caso coincide con quello ordinario) si ha

$$d\bar{W}(t) = df(t, W(t)) = \left\{\partial_t f(t, W(t)) + \partial_x f(t, W(t))\left[U(t)\left(a\left(t, \frac{V(t)+W(t)}{U(t)}\right) - \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\right)\right]\right\}dt \tag{102}$$

$$= \left\{\sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\,U(t) + U(t)\left[a\left(t, \frac{V(t)+W(t)}{U(t)}\right) - \sigma_1(t)\,\sigma_2(t)\right]\right\}dt$$

$$= U(t)\,a\left(t, \frac{V(t) + \bar{W}(t) - \int_0^t ds\sigma_1(s)\,\sigma_2(s)\,U(s)}{U(t)}\right)dt\ .$$

Pertanto, $\bar{W}(t)$ risolve

$$\begin{cases} d\bar{W}(t) = U(t)\,a\left(t, \frac{V(t)+\bar{W}(t)-\int_0^t ds\sigma_1(s)\sigma_2(s)U(s)}{U(t)}\right)dt \\ \bar{W}(0) = W(0) = X_0 \end{cases}, \tag{103}$$

ovvero

$$\begin{cases} d\bar{W}(t) = & e^{\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_1^2(s)ds - \int_0^t \sigma_1(s)dB(s)} \times \\ & \times a\left(t, \left(\bar{W}(t)\,e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_1^2(s)ds + \int_0^t \sigma_1(s)dB(s)} + \int_0^t ds\sigma_1(s)\,\sigma_2(s)\,e^{-\frac{1}{2}\int_s^t \sigma_1^2(u)du + \int_s^t \sigma_1(u)dB(u)} + \right.\right. \\ & \left.\left. + \int_0^t \sigma_2(s)\,e^{-\frac{1}{2}\int_s^t \sigma_1^2(u)du + \int_s^t \sigma_1(u)dB(u)} dB(s)\right)\right)dt \\ \bar{W}(0) = X_0 & \end{cases}. \tag{104}$$

3.2 Trasformata di Lamperti

In generale la (11) si può ridurre alla ad un equazione differeziale stocastica di Itô non lineare con termine di rumore additivo del tipo (70).

Infatti, sia

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t a(t, X(s))\, ds + \int_0^t b(t, X(s))\, dB(s) \ . \tag{105}$$

Ponendo $Y(t) = h(t, X(t))$, dove $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \ni (t, x) \longmapsto f(t, x) \in \mathbb{R}$ ha derivate del primo ordine in t e del secondo ordine in x continue, otteniamo

$$\begin{aligned} dh(X(t)) = & \left[\partial_t h(t, X(t)) + a(t, X(t))\, \partial_x h(t, X(t)) + \frac{1}{2} b^2(t, X(t))\, \partial_{xx}^2 h(t, X(t)) \right] dt \\ & + b(t, X(t))\, \partial_x h(t, X(t))\, dB(t) \ . \end{aligned} \tag{106}$$

In particolare, ponendo

$$h(t, x) = \int_{x_0}^x dy \frac{1}{b(t, y)} \tag{107}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$ dato, otterremmo $b(t, x)\, \partial_x h(t, x)) = 1$ quindi $Y(t)$ risolverebbe

$$dY(t) = c(t, Y(t))\, dt + dB(t) \ , \tag{108}$$

dove

$$c(t, y) := \partial_t h\left(t, h^{-1}(t, y)\right) + \frac{a\left(t, h^{-1}(t, y)\right)}{b\left(t, h^{-1}(t, y)\right)} - \frac{1}{2} (\partial_x b)\left(t, h^{-1}(t, y)\right) \ , \tag{109}$$

che è un'equazione differenziale stocastica di Itô non lineare con termine di rumore additivo.

Il processo $Y(t)$ è detto *trasformata di Lamperti* del processo $X(t)$.

4 Soluzione delle equazioni differenziali stocastiche di Itô tramite il calcolo di Stratonovich-Fisk

Se il processo $X(t)$ soddisfa (11), data una funzione $f \in L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}, dt \otimes \mathbb{P})$, si definisce l'intergrale di Stratonovich-Fisk $\int_0^t f(s, X(s)) \circ dB(s)$ come il limite in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ delle somme di Riemann $\sum_{i=1}^{n_\sigma} f\left(t_{i-1}, \frac{X(t_{i-1})+X(t_i)}{2}\right)(B(t_i) - B(t_{i-1}))$, dove σ è la partizione $[0, t]$ tale che $0 = t_0 < \cdots < t_{n_\sigma} = t$, di al tendere a zero del diametro $|\sigma|$ della partizione.

La relazione tra l'integrale di Stratonovich-Fisk e quello di Itô è

$$\int_0^t f(s, X(s)) \circ dB(s) = \int_0^t f(s, X(s))\, dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t b(s, X(s))\, \partial_x f(s, X(s))\, ds \tag{110}$$

pertanto, se $X(t) = B(t)$ e $f(t, X(t)) = \left(\frac{d}{dx} g\right)(B(t))$ si ha

$$\int_0^t \left(\frac{d}{dx} g\right)(B(s)) \circ dB(s) = \int_0^t \left(\frac{d}{dx} g\right)(B(s))\, dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{d^2}{dx^2} g\right)(B(s))\, ds \ . \tag{111}$$

Tuttavia, poiché il processo $Y(t) := g(B(t))$ soddisfa all'equazione differenziale stocastica di Itô

$$Y(t) - Y(0) = g(B(t)) - g(0) = \int_0^t \left(\frac{d}{dx}g\right)(B(s))\,dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{d^2}{dx^2}g\right)(B(s))\,ds \tag{112}$$

otteniamo

$$\int_0^t \left(\frac{d}{dx}g\right)(B(s)) \circ dB(s) = g(B(t)) - g(0)\ . \tag{113}$$

Pertanto, l'integrale di Stratonovich-Fisk permette di recuperare le regole del calcolo differenziale ordinario per risolvere le equazioni differenziali stocastiche di Itô al prezzo di perdere la proprietà di martingala dell'integrale di Itô.

Consideriamo infatti il processo $X(t)$ descritto dalla (11); ponendo $b(t, X(t))$ nella (110) si ottiene

$$\int_0^t b(s, X(s))\,dB(s) = \int_0^t b(s, X(s)) \circ dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t b(s, X(s))\,\partial_x b(s, X(s))\,ds \tag{114}$$

che sostituito nella (11) implica che $X(t)$ soddisfa

$$X(t) - X_0 = \int_0^t \alpha(s, X(s))\,ds + \int_0^t b(s, X(s)) \circ dB(s) \tag{115}$$

con

$$\alpha(t, X(t)) := a(t, X(t)) - \frac{1}{2} b(s, X(s))\,\partial_x b(s, X(s))\,ds \tag{116}$$

Pertanto $X(t)$ soddisfa (11) se e solo se soddisfa l'*equazione differenziale di Stratonovich-Fisk* (115).

Inoltre, se $Y(t) = f(t, Y(t))$ il suo differenziale di Itô risulta

$$\begin{aligned} dY(t) = &\left[\partial_t f(t, X(t)) + a(t, X(t))\,\partial_x f(t, X(t)) + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 f(t, X(t))\,b^2(t, X(t))\right] dt + \\ &+ b(t, X(t))\,\partial_x f(t, X(t))\,dB(t) \end{aligned} \tag{117}$$

ma, ponendo $b(t, X(t))\,\partial_x f(t, X(t))$ nella (110) si ottiene

$$\begin{aligned} b(t, X(t))\,\partial_x f(t, X(t))\,dB(t) = &\ b(t, X(t))\,\partial_x f(t, X(t)) \circ dB(t) + \\ &- \frac{1}{2} b(t, X(t))\left[\partial_x b(t, X(t))\,\partial_x f(t, X(t)) + b(t, X(t))\,\partial_{xx}^2 f(t, X(t))\right] dt \end{aligned} \tag{118}$$

che risostituito nell'espressione di $dY(t)$ dà

$$dY(t) = \left[\partial_t f(t, X(t)) + \alpha(t, X(t))\right] dt + b(t, X(t))\,\partial_x f(t, X(t)) \circ dB(t)\ . \tag{119}$$

Quest'ultima espressione per $dY(t) = df(t, X(t))$ risulta formalmente equivalente al differenziale della funzione $f(t, x(t))$ dove $x(t)$ è la funzione deterministica il cui differenziale è

$$dx(t) = \alpha(t, x(t))\,dt + b(t, x(t))\,d\gamma(t) \tag{120}$$

con γ funzione differenziabile. Infatti,

$$\begin{aligned} df(t, x(t)) &= \partial_t f(t, x(t))\,dt + \partial_x f(t, x(t))\left(\alpha(t, x(t))\,dt + b(t, x(t))\,d\gamma(t)\right) \\ &= \left[\partial_t f(t, x(t)) + \partial_x f(t, x(t))\,\alpha(t, x(t))\right] dt + b(t, x(t))\,\partial_x f(t, x(t))\,d\gamma(t)\ . \end{aligned} \tag{121}$$

Pertanto, la soluzione della precedente equazione differenziale corrisponde a quella della (119).

Esempio 3 *Data $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenziabile e $c \in \mathbb{R}$. Sia*

$$X(t) - X_0 = \int_0^t \left[cf(X(s)) + \frac{1}{2} f(X(s)) \left(\frac{d}{dx} f \right) (X(s)) \right] dt + \int_0^t f(X(s))\, dB(s) \ . \tag{122}$$

Denotando con

$$\begin{aligned} a(t, X(t)) = a(X(t)) &:= cf(X(s)) + \frac{1}{2} f(X(s)) \left(\frac{d}{dx} f \right) (X(s)) \ , \\ b(t, X(t)) = b(X(t)) &:= f(X(t)) \ , \end{aligned}$$

dalla (115) e dalla (116) l'equazione differenziale di Stratonovich-Fisk equivalente risulta

$$\begin{aligned} X(t) - X_0 &= \int_0^t \alpha(X(s))\, ds + \int_0^t b(X(s)) \circ dB(s) \\ &= \int_0^t cf(X(s))\, dt + \int_0^t f(X(s)) \circ dB(s) \end{aligned} \tag{123}$$

che corrisponde alla soluzione del problema di Cauchy deterministico

$$\begin{cases} dx(t) = cf(x(t))\, dt + f(x(t))\, d\gamma(t) \\ x(0) = X_0 \end{cases} \ . \tag{124}$$

Denotando con G la primitiva di $\frac{1}{f}$, si ottiene

$$G(x(t)) - G(X_0) = \int_{X_0}^{x(t)} \frac{dx}{f(x)} = ct + \gamma(t) - \gamma(0) \ . \tag{125}$$

Sostituendo X a x e B a γ si ha $G(X(t)) - G(X_0) = ct + B(t)$ e, se G è invertibile, $X(t) = G^{-1}(G(X_0) + ct + B(t))$.