Applicazioni del calcolo stocastico alla finanza quantitativa

Michele Gianfelice

a.a. 2021/2022

1 Azioni, obbligazioni e portafoglio finanziario

Se $(X(t), t \geq 0)$ rappresenta l'evoluzione del valore di un bene (*asset*), la sua variazione percentuale nell'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ in generale sarà pari ad un valore proporzionale a Δt tramite una costante $c > 0$, detta *tasso medio di ritorno* più un termine rumore proporzionale tramite una costante $\sigma > 0$, detta *volatilità*, ad una v.a. con distribuzione $N(0, \Delta t)$. Infatti, qualora $X(t)$ rappresentasse il valore al tempo t di un *obbligazione*, cioè un titolo di stato o un deposito bancario, la variazione percentuale di $X(\cdot)$ in $[t, t + \Delta t]$ sarebbe proporzionale a Δt tramite il tasso d'interesse del titolo, ovvero

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} = c\Delta t \ ; \tag{1}$$

perciò, nel limite $\Delta t \downarrow 0, \mathbb{R}^+ \ni t \longmapsto X(t) \in \mathbb{R}$ soddisferebbe l'equazione differenziale ordinaria

$$dX(t) = cX(t)\, dt \ . \tag{2}$$

Se invece $X(t)$ rappresentasse il valore al tempo t di un titolo rischioso, per esempio un'*azione*, cioè un titolo che rappresenta la quota parte del capitale di una società quotata in borsa, la variazione percentuale di $X(\cdot)$ in $[t, t + \Delta t]$ sarebbe proporzionale a Δt soltanto in media, in quanto si comporterebbe come una v.a. gaussiana di media e varianza propozionali a Δt; ovvero, in tal caso,

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} = c\Delta t + \sigma (B(t + \Delta t) - B(t)) \ . \tag{3}$$

Pertanto, l'evoluzione del valore di un titolo rischioso, nel limite $\Delta t \downarrow 0$, sarebbe dato dall'equazione differenziale stocastica che rappresenta un moto browniano geometrico di coeffiecienti $c, \sigma > 0$, cioè

$$dX(t) = cX(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t) \ . \tag{4}$$

1.1 Valore di un portafoglio

Un *portafoglio* finanziario di un investitore è costituito dall'insieme di titoli rischiosi e non rischiosi che questi possiede. Pertanto, al tempo $t \geq 0$, il valore del portafoglio $V(t)$ è dato dalla quantità quantità di titoli rischiosi posseduti $a(t)$ moltiplicata per il loro valore $X(t)$ e dalla quantità di obbligazioni possedute $b(t)$ moltiplicata per il loro valore $\beta(t)$, ovvero

$$V(t) = a(t)\,X(t) + b(t)\,\beta(t) \ , \tag{5}$$

dove

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + \int_0^t cX(s)\,ds + \int_0^t \sigma X(s)\,dB(s) \ , & (6) \\ \beta(t) &= \beta_0 + \int_0^t r\beta(s)\,ds = \beta_0 e^{rt} \ , & (7) \end{aligned}$$

con r il tasso d'interesse dell'obbligazione. La coppia $(a(t), b(t))$ è detta *strategia d'investimento* o *trading strategy* e si assume che sia $(a(t), t \geq 0)$ che $(b(t), t \geq 0)$ siano processi stocastici adattati alla filtrazione del moto browniano.

Sotto l'ipotesi che i costi di transazione siano da considerarsi irrisori, così come le tasse e le spese di tenuta dei conti, in modo che questi non possano esaurirsi per *consunzione*, cioè se non si fanno operazioni, si può considerare per un portafoglio una strategia cosiddetta *autofinanziante* o *self-finincing*, ovvero tale che, ad ogni istante di tempo, la variazione del valore del portafoglio dipende unicamente da quella dei valori delle componenti azionaria o obbligazionaria dello stesso, vale a dire

$$dV(t) = a(t)\,dX(t) + b(t)\,d\beta(t) \ . \tag{8}$$

Riscritta sotto forma d'integrale di Itô, per le (7), (5) e (6), l'equazione differenziale stocastica (8) diventa

$$
\begin{aligned}
V(t) - V_0 &= \int_0^t a(s)\, dX(s) + \int_0^t b(s)\, d\beta(s) \qquad (9) \\
&= \int_0^t a(s)\, dX(s) + \int_0^t b(s)\, r\beta(s)\, ds \\
&= \int_0^t a(s)\, dX(s) + \int_0^t \frac{V(s) - a(s)\, X(s)}{\beta(s)} r\beta(s)\, ds \\
&= \int_0^t \left[a(s)(c-r)\, X(s) + rV(s)\right] ds + \int_0^t \sigma a(s)\, X(s)\, dB(s) \ .
\end{aligned}
$$

2 Opzioni

Definizione 1 *Un* opzione *è un contratto stipulato tra l'acquirente e la società emittente (per esempio una banca o una società d'investimenti).*

L'acquirente acquista la possibilità - ma non l'obbligo - a comperare, nel caso di opzione call *ovvero vendere, nel caso di opzione* put*, una data quantità di una determinata attività finanziaria, detta* sottostante*, che può essere di un bene reale come una materia prima (per esempio: grano, oro, petrolio, ecc.) o finanziaria, come per esempio azioni, obbligazioni, ecc.*

Il contratto prevede che l'acquisto, nel caso di opzione call, o la vendita, nel caso di opzione put, debba essere formalizzato entro o ad una determinata data, detto tempo d'esercizio *o di* strike*, ad un determinato prezzo, detto* prezzo d'esercizio *o* strike price*.*

Il prezzo che l'acquirente paga all'emittente per acquistare il contratto è dello premio *dell'opzione.*

Acquistare un opzione call vuol dire scommettere sul rialzo del valore del sottostante; infatti, in questo caso, la remunerazione o *payoff* dell'acquirente sarà pari a

$$(X(\tau) - K) \vee 0 - p \ , \qquad (10)$$

dove:

- τ è il tempo d'esercizio;
- $X(\tau)$ è il valore del sottostate al tempo d'esercizio;
- K è il prezzo d'esercizio;
- p è il premio.

Osserviamo che se $X(\tau) \leq K$ non è conveniente esercitare l'opzione poiché il valore del sottostante è al più pari al prezzo d'esercizio; perciò la remunerazione dell'acquirente al lordo del premio vale $(X(\tau) - K) \vee 0$.

Parimenti, acquistare un opzione put vuol dire scommettere sul ribasso del valore del sottostante; infatti, in questo caso, la remunerazione dell'acquirente sarà pari a

$$(K - X(\tau)) \vee 0 - p \; . \tag{11}$$

Ovvero, se $X(\tau) \geq K$ non è conveniente esercitare l'opzione poiché il valore del sottostante è al meno pari al prezzo d'esercizio; perciò la remunerazione dell'acquirente al lordo del premio vale $(K - X(\tau)) \vee 0$.

Qual'è il valore corretto del premio di un opzione che l'acquirente deve pagare all'emittente?

Sotto le stesse ipotesi adottate per definire una strategia d'investimento autofinanziante, nel caso delle opzioni cosiddette *europee*, cioè quelle in cui l'acquirente è chiamato a esercitare l'opzione di acquisto, se trattasi di opzione call, o di vendita, se trattasi di opzione put, ad un tempo T fissato, il valore corretto di p è dato dalla formula di Black-Scholes. Questa afferma che p è pari al valore iniziale $V(0)$ di un portafoglio di titoli rischiosi e non rischiosi il cui valore $(V(t), t \in [0,T])$ evolve secondo una strategia d'investimento autofinanziante tale che, al tempo d'esercizio $T, V(T)$ riproduce la remunerazione dell'opzione al lordo del premio, cioè $V(T) = h(X(T))$, dove $h(X(T))$ è pari a $(X(T) - K) \vee 0$ nel caso di opzione call e $(K - X(T)) \vee 0$ nel caso di opzione put. Infatti, se l'acquirente A pagasse per un opzione call un premio $p < V(0) =: q$, potrebbe vendere ad un altro acquirente B l'opzione ad un prezzo pari a q ed investire detta quantità di denaro in un portafoglio $(V(t), t \in [0,T])$ che evolve secondo una strategia autofinanziante tale che al tempo d'esercizio $T, V(T) = (X(T) - K) \vee 0$. Pertanto, se $X(T)$ risultasse minore o uguale a K e l'opzione non venisse esercitata, il guadagno per A sarebbe pari a $q - p > 0$. Tuttavia, anche nel caso in cui $X(T)$ risultasse maggiore di K e quindi B esercitasse l'opzione, la remunerazione di A al tempo T sarebbe pari al valore del portafoglio al tempo T, più il premio pagato da B per l'acquisto dell'opzione, meno il premio p pagato all'emittente per l'acquisto dell'opzione e meno il costo da pagare sul mercato per la cessione a B della quantità di sottostante al prezzo d'esercizio; ovvero

$$(X(T) - K) + q - p - (X(T) - K) = q - p > 0 \; . \tag{12}$$

Il che implica che A otterrebbe comunque un guadagno senza alcun rischio di perdita di denaro. D'altra parte se l'acquirente A pagasse per un opzione call un premio $p > V(0) =: q$, l'emittente potrebbe investire detta quantità di denaro in un portafoglio $(V(t), t \in [0,T])$ che evolve secondo una strategia autofinanziante tale che al tempo d'esercizio $T, V(T) = (X(T) - K) \vee 0$. A questo punto, se $X(T)$ risultasse minore o uguale a K, A non eserciterebbe l'opzione e la remunerazione dell'emittente sarebbe pari a $p - q > 0$, mentre se $X(T)$ risultasse maggiore di K e quindi A esercitasse l'opzione, la remunerazione dell'emittente al tempo d'esercizio T sarebbe pari al premio incassato dall'acquirente A per l'acquisto dell'opzione, più il valore del portafoglio al tempo d'esercizio T, meno la somma della quota investita nel suddetto portafoglio ed il costo da pagare sul mercato per la cessione ad A della quantità di sottostante al prezzo d'esercizio; ovvero

$$p + (X(T) - K) - (q + (X(T) - K)) = p - q > 0 \; . \tag{13}$$

In questo caso, quindi, sarebbe l'emittente ad ottenere un guadagno senza rischio di perdita di denaro.

Considerazioni analoghe valgono nel caso in cui si consideri un'opzione europea put.

Un operazione sul mercato che consente di ottenere un profitto senza correre alcun rischio è detta *arbitraggio*. Dunque, in altre parole, si può affermare che la formula di Black-Scholes permette di identificare il valore del premio che un acquirente deve corrispondere all'emittente per l'acquisto di un opzione in modo che i rischi dell'operazione siano equamente ripartiti tra le parti, ovvero che nessuna delle due parti possa effettuare un arbitraggio.

2.1 Formula di Black-Scholes per il prezzaggio delle opzioni europee

Supponiamo che il valore $(V(t), t \geq 0)$ di un portafoglio che evolve secondo una strategia d'investimento autofinanziante sia dato da una funzione deterministica $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \ni (s, x) \longmapsto u(s, x) \in \mathbb{R}$, tale che $\forall x \in \mathbb{R}, u(\cdot, x) \in C^1(\mathbb{R}^+)$ e $\forall t \in \mathbb{R}^+, u(s, \cdot) \in C^2(\mathbb{R})$, per cui $\forall t \in [0, T]$,

$$V(t) = u(T - t, X(t)) \tag{14}$$

con la condizione che al tempo d'esercizio $T, V(T) = u(0, X(T)) := h(X(T))$ con

$$h(X(T)) = \begin{cases} (X(T) - K) \vee 0 & \text{opzione } \textit{call} \\ (K - X(T)) \vee 0 & \text{opzione } \textit{put} \end{cases} . \tag{15}$$

Calcolando il differenziale di Itô del processo stocastico (14), ponendo $V(t) = f(t,x)$, dalla (6) si ottiene

$$\begin{aligned} V(t) - V(0) &= \int_0^t \left[(\partial_t f)(s, X(s)) + cX(s)(\partial_x f)(s, X(s)) + \right. && (16) \\ &\quad \left. + \sigma^2 X^2(s) \frac{1}{2} \left(\partial^2_{xx} f \right)(s, X(s)) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma X(s)(\partial_x f)(s, X(s))\, dB(s) \\ &= \int_0^t \left[-(\partial_t u)(T-s, X(s)) + cX(s)(\partial_x u)(T-s, X(s)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2(s) \left(\partial^2_{xx} u \right)(T-s, X(s)) \right] ds + \\ &\quad + \int_0^t \sigma X(s)(\partial_x u)(T-s, X(s))\, dB(s) \ , \end{aligned}$$

che uguagliata alla (9) implica

$$a(t) = (\partial_x u)(T-t, X(t)) \ , \tag{17}$$

$$\begin{aligned} a(t)(c-r)X(t) + rV(t) = -(\partial_t u)(T-t, X(t)) + \qquad (18) \\ + cX(t)(\partial_x u)(T-t, X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2(t) \left(\partial^2_{xx} u \right)(T-s, X(t)) \ . \end{aligned}$$

Tenendo conto della (14) e sostituendo la prima delle precedenti espressioni nella seconda si ottiene

$$\begin{aligned} (\partial_x u)(T-t, X(t))(c-r)X(t) + ru(T-t, X(t)) = \qquad (19) \\ -(\partial_t u)(T-t, X(t)) + cX(t)(\partial_x u)(T-t, X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2(t)(\partial_x u)(T-s, X(t)) \ , \end{aligned}$$

ovvero che la funzione $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \ni (t,x) \longmapsto u(t,x) \in \mathbb{R}$ è la soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} u(t,x) + rx \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) - ru(t,x) \\ u(0,x) = h(x) \end{cases} \tag{20}$$

con $h(x)$ dato dalla (15).

Pertanto, per quanto detto sopra, il valore corretto del premio di un opzione europea sarà

$$V(0) = u(T, X(0)) = u(T, X_0) \ . \tag{21}$$

È possibile calcolare la soluzione di (20), senza avventurarsi nella sua risoluzione analitica, facendo alcune considerazioni di teoria dei processi stocastici. In particolare, la soluzione esplicita della (20) è una conseguenza del seguente risultato.

Teorema 2 *(di Girsanov) Per ogni $T \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}$:*

- *il processo stocastico $(M_\alpha(t), t \in [0,T])$ tale che*
$$M_\alpha(t) := \exp\left\{-\alpha B(t) - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right\} \ , \ t \geq 0 \tag{22}$$
è una martingala rispetto alla filtrazione generata dal moto browniano;

- *se $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è lo spazio di probabilità di Wiener costruito sulle funzioni $C_0([0,T])$, l'applicazione*
$$\mathcal{F} \ni A \longmapsto \mathbb{Q}_\alpha(A) := \int_A d\mathbb{P}(\omega) M_\alpha(T)(\omega) \in [0,1] \tag{23}$$
è una misura di probabilità equivalente a $\mathbb{P}$ su $(\Omega, \mathcal{F})$ ed è perciò detta misura martingala equivalente*;*

- *il processo stocastico $(B_\alpha(t), t \in [0,T])$ tale che $\forall t \in [0,T], B_\alpha(t) := B(t) + \alpha t$ (moto browniano con drift α) è adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ generata da $(B(t), t \in [0,T])$ e sotto la misura $\mathbb{Q}_\alpha, (B_\alpha(t), t \in [0,T])$ è un moto browniano standard.*

Dimostrazione. Per ogni $t, s \in [0,T]$ tali che $s < t$,
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_\alpha(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\alpha(B(t)-B(s)) - \alpha B(s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s) - \frac{\alpha^2}{2}s\right\}\middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= M_\alpha(s)\,\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\alpha(B(t)-B(s)) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right\}\middle| \mathcal{F}_s\right] \\ &= M_\alpha(s)\,\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\alpha(B(t)-B(s)) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right\}\right] \\ &= M_\alpha(s)\,\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\alpha B(t-s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right\}\right] \\ &= M_\alpha(s)\,\mathbb{E}[M_\alpha(t-s)] \ , \end{aligned} \tag{24}$$
ma
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_\alpha(t-s)] &= \mathbb{E}\left[e^{-\alpha B(t-s) - \frac{\alpha^2}{2}(t-s)}\right] = e^{-\frac{\alpha^2}{2}(t-s)}\mathbb{E}\left[e^{-\alpha\sqrt{t-s}B(1)}\right] \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}(t-s)}\int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha\sqrt{t-s}x} = 1 \ ; \end{aligned} \tag{25}$$

pertanto $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (M_\alpha (t), t \in [0,T])$ è una martingala rispetto alla filtrazione generata dal moto browniano. $\forall t \in [0,T], M_\alpha (t) > 0$ e per la (25) $M_\alpha (t) \in L^1 (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{E}[M_\alpha (t)] = 1$, dunque $\mathcal{F} \ni A \longmapsto \mathbb{Q}_\alpha (A) := \mathbb{E}[M_\alpha (T) \mathbf{1}_A] \in [0,1]$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ assolutamente continua rispetto a $\mathbb{P}$ con derivata di Radon-Nikodým $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = M_\alpha (T)$.

Poiché $\forall t, s \in [0,T]$ tali che $s < t$,

$$\begin{aligned} B_\alpha (t) - B_\alpha (s) &= B(t) - B(s) + \alpha (t-s) \overset{d}{=} B(t-s) + \alpha (t-s) \\ &\overset{d}{=} \sqrt{t-s} B(1) + \alpha (t-s) \ , \end{aligned} \tag{26}$$

e per la (22)

$$\frac{M_\alpha (t)}{M_\alpha (s)} \overset{d}{=} M_\alpha (t-s) \ , \tag{27}$$

indicando con $\mathbb{E}_\alpha$ il valore atteso rispetto alla misura di probabilità $\mathbb{Q}_\alpha$, per ogni partizione $0 \leq t_0 < \cdots < t_n = T$ di $[0,T]$ e ogni funzione a valori reali $[0,T] \ni t \longmapsto \lambda (t) := \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mathbf{1}_{(t_i t_{i+1}]} (t) \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\alpha \left[e^{i \int_0^T dB_\alpha (t) \lambda (t)} \right] &= \mathbb{E} \left[M_\alpha (T) \exp i \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j [B_\alpha (t_{j+1}) - B_\alpha (t_j)] \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[M_a (t_{n-1}) \frac{M_\alpha (t_n)}{M_a (t_{n-1})} \exp i \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j [B_\alpha (t_{j+1}) - B_\alpha (t_j)] \right\} \right] \ ; \end{aligned} \tag{28}$$

iterando l'ultima espressione,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\alpha \left[e^{i \int_0^T dB_\alpha (t) \lambda (t)} \right] &= \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \frac{M_\alpha (t_{j+1})}{M_\alpha (t_j)} \exp i \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j [B_\alpha (t_{j+1}) - B_\alpha (t_j)] \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{n-1} M_\alpha (t_{j+1} - t_j) \exp i \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j B_\alpha (t_{j+1} - t_j) \right\} \right] \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) + i\alpha \lambda_j (t_{j+1} - t_j)} \times \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} -\alpha B (t_{j+1} - t_j) + i \lambda_j B (t_{j+1} - t_j) \right\} \right] \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} e^{\left(-\frac{\alpha^2}{2} + i\alpha\lambda_j \right) (t_{j+1} - t_j)} \mathbb{E} \left[e^{(-\alpha + i\lambda_j) B (t_{j+1} - t_j)} \right] \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} e^{\left(-\frac{\alpha^2}{2} + i\alpha\lambda_j \right) (t_{j+1} - t_j)} \mathbb{E} \left[e^{(-\alpha + i\lambda_j) \sqrt{t_{j+1} - t_j} B(1)} \right] \ , \end{aligned} \tag{29}$$

ma poiché $\forall j =, 0, .., n-1$,

$$\mathbb{E}\left[e^{(-\alpha+i\lambda_j)\sqrt{t_{j+1}-t_j}B(1)}\right] = \int_{\mathbb{R}} dx e^{x(-\alpha+i\lambda_j)\sqrt{t_{j+1}-t_j}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{30}$$
$$= e^{\left(\frac{\alpha^2}{2}-i\alpha\lambda_j-\lambda_j^2\right)(t_{j+1}-t_j)} ,$$
$$\mathbb{E}_\alpha\left[e^{i\int_0^T dB_\alpha(t)\lambda(t)}\right] = \prod_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda_j^2(t_{j+1}-t_j)} = e^{-\int_0^T dt\lambda^2(t)} . \tag{31}$$

D'altra parte però

$$e^{-\int_0^T dt\lambda^2(t)} = \prod_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda_j^2(t_{j+1}-t_j)} = \prod_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda_j\sqrt{t_{j+1}-t_j}B(1)}\right] \tag{32}$$
$$= \prod_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda_j B(t_{j+1}-t_j)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j B(t_{j+1}-t_j)}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[e^{i\int_0^T \lambda(t)dB(t)}\right] .$$

Ciò prova che sotto la misura di probabilità $\mathbb{Q}_\alpha$ il processo stocastico $(B_\alpha(t), t \geq 0)$ è uguale in distribuzione al moto browniano (perché?). ■

Notiamo innazitutto che il moto browniano geometrico $(Y(t), t \geq 0)$ soluzione dell'equazione differenziale stocastica di Itô

$$dY(t) = cY(t)\,dt + \sigma Y(t)\,dB(t) \ , \ c \in \mathbb{R}, \sigma > 0 , \tag{33}$$

ovvero

$$Y(t) = Y(0)\exp\left\{\left(c - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right\} , \tag{34}$$

può essere riscritto come funzione del moto browniano con drift $B_{\frac{c}{\sigma}}(t)$, di cui al teorema di Girsanov. Infatti,

$$Y(t) = Y(0)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B_{\frac{c}{\sigma}}(t)\right\} \tag{35}$$

e riscrivendo la (33) nella forma

$$dY(t) = \sigma Y(t)\left[\frac{c}{\sigma}dt + dB(t)\right] = \sigma Y(t)\,dB_{\frac{c}{\sigma}}(t) \tag{36}$$

otteniamo che, poiché per il teorema di Girsanov, sotto $\mathbb{Q}_{\frac{c}{\sigma}}$, $\left(B_{\frac{c}{\sigma}}(t), t \geq 0\right)$ coincide in distribuzione con il moto browniano, sotto questa misura di probabilità $(Y(t), t \geq 0)$ è una martingala rispetto alla filtrazione generata dal moto browniano.

Consideriamo allora i processi relativi al prezzo di un attività finanziaria rischiosa (6) e del valore di un portafogli che evolve secondo una strategia autofinanziante (8) che compaiono nel problema di Black-Scholes del prezzaggio di un opzione europea precedentemente descritto, e consideriamo i loro valori al tempo $t \in [0,T]$ *scontati* secondo il tasso d'interesse dell'attività non rischiosa descritta dalla (7), ovvero $\left(\bar{X}(t), t \in [0,T]\right)$ tale che $\bar{X}(t) = e^{-rt} X(t)$ e $\left(\bar{V}(t), t \in [0,T]\right)$ tale che $\bar{V}(t) = e^{-rt} V(t)$. Calcolando il differenziale di Itô di $\bar{X}(t) = f(t, X(t))$ con $f(t,x) = e^{-rt}x$, dalla (6) otteniamo

$$\begin{aligned} d\bar{X}(t) &= \left(-r\bar{X}(t) + c\bar{X}(t)\right) dt + \sigma \bar{X}(t)\, dB(t) \\ &= \sigma \bar{X}(t)\, dB_{\frac{c-r}{\sigma}}(t) \end{aligned} \tag{37}$$

ovvero che sotto la misura di probabilità $\mathbb{Q}_{\frac{c-r}{\sigma}}$, $\left(\bar{X}(t), t \geq 0\right)$ è una martingala rispetto alla filtrazione generata dal moto browniano. Inoltre, dalla (9) e dalla (37), calcolando il differenziale di Itô di $\bar{V}(t) = f(t, V(t))$ con $f(t,x) = e^{-rt}x$, si ha

$$\begin{aligned} d\bar{V}(t) &= -r\bar{V}(t)\, dt + e^{-rt} dV(t) \\ &= -r\bar{V}(t)\, dt + \left[a(t)(c-r)\bar{X}(t) + r\bar{V}(t)\right] dt + \sigma a(t) \bar{X}(t)\, dB(t) \\ &= a(t)(c-r)\bar{X}(t)\, dt + \sigma a(t)\bar{X}(t)\, dB(t) \\ &= \sigma a(t) \bar{X}(t)\, dB_{\frac{c-r}{\sigma}}(t) = a(t)\, d\bar{X}(t)\ , \end{aligned} \tag{38}$$

pertanto anche il processo stocastico $\left(\bar{V}(t), t \geq 0\right)$ sotto la misura di probabilità $\mathbb{Q}_{\frac{c-r}{\sigma}}$ è una martingala rispetto alla filtrazione generata dal moto browniano; da cui segue che $\forall t \in [0,T]$,

$$\bar{V}(t) = e^{-rt} V(t) = \mathbb{E}_{\frac{c-r}{\sigma}}\left[\bar{V}(T) | \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\frac{c-r}{\sigma}}\left[e^{-rT} V(T) | \mathcal{F}_t\right]\ , \tag{39}$$

ma per ipotesi $V(T) = u(0, X(T)) := h(X(T))$, perciò

$$V(t) = \mathbb{E}_{\frac{c-r}{\sigma}}\left[e^{-r(T-t)} h(X(T)) | \mathcal{F}_t\right]\ . \tag{40}$$

Poiché dalla (35)

$$\begin{aligned} X(T) &= X(0)\, e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma B_{\frac{c-r}{\sigma}}(T)} \\ &= X(0)\, e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 (t) + \sigma B_{\frac{c-r}{\sigma}}(t)} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) + \sigma\left(B_{\frac{c-r}{\sigma}}(T) - B_{\frac{c-r}{\sigma}}(t)\right)} \\ &= X(t)\, e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) + \sigma\left(B_{\frac{c-r}{\sigma}}(T) - B_{\frac{c-r}{\sigma}}(t)\right)}\ , \end{aligned} \tag{41}$$

sostituendo nella (40), per il teorema di Girsanov, otteniamo

$$\begin{aligned} V(t) &= u(T-t, X(t)) \qquad (42) \\ &= \mathbb{E}_{\frac{c-r}{\sigma}}\left[e^{-r(T-t)}h\left(X(t)\,e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\left(B_{\frac{c-r}{\sigma}}(T)-B_{\frac{c-r}{\sigma}}(t)\right)}\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[h\left(X(t)\,e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma(B(T)-B(t))}\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \ , \end{aligned}$$

ma poiché $X(t)$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile e $B(T)-B(t) \overset{d}{=} B(T-t)$ è indipendente da $\mathcal{F}_t$,

$$\begin{aligned} u(T-t, X(t)) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[h\left(X(t)\,e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma B(T-t)}\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \qquad (43) \\ &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[h\left(xe^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}B(1)}\right)\right]\rceil_{x=X(t)} \qquad (44) \\ &= e^{-r(T-t)}\int_{\mathbb{R}} dx\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}h\left(X(t)\,e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}x}\right) \ , \end{aligned}$$

cioè la soluzione del problema (20) e pertanto il valore corretto del premio di un opzione europea (21) sarà pari a

$$u(T, X_0) = e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} dx\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}h\left(X_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma\sqrt{T}x}\right) \ . \qquad (45)$$