Esercizi di Simulazione

M. Gianfelice

a.a. 2004/2005

Sommario

Per le notazioni e la terminologia si rimanda alle note sulle esercitazioni del corso di *modelli probabilistici per le applicazioni*.

1 Distribuzioni discrete

Esercizio 1 *Simulare il n.a.* X*, tale che* $I(X) = \{1, .., 10\}$ *e, posto* $\mathbb{P}(X = i) := p_i \quad i = 1, .., 10$,

$$\{p_1, .., p_{10}\} = \{0.11, 0.12, 0.9, 0.8, 0.12, 0.10, 0.9, 0.10, 0.10\}.$$

Esercizio 2 *Simulare il n.a.* X*, tale che* $I(X) = \{5, .., 14\}$ *e, posto* $\mathbb{P}(X = i) := p_i$,

$$p_i = \begin{cases} 0.11 & i \text{ è dispari e } 5 \leq i \leq 13 \\ 0.9 & i \text{ è pari e } 6 \leq i \leq 14 \end{cases}.$$

*(**Suggerimento** : notare che* $\mathbb{P}(X = i) = 0.9q_i + 0.1r_i$ *dove* $q_i = 0.1, \forall i = 1, .., 14$ *e* $r_i = (0.11)\,\mathbf{1}_{\{5,7,9,11,13\}}(i)$*).*

Esercizio 3 *Simulare il n.a.* X*, tale che* $I(X) = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *e, posto* $\mathbb{P}(X = i) := p_i$,

$$p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} + \frac{2^{i-2}}{3^i}, \quad i \geq 1.$$

*(**Suggerimento** : procedere come nel caso della distribuzione geometrica, Esempio 3 delle note del corso).*

Esercizio 4 *Simulare il n.a.* X*, di cui all'Esercizio 1 facendo uso del n.a.* Y *tale che* $I(Y) = \{1, .., 10\}$ *e* $\mathbb{P}(Y = i) := q_i = \frac{1}{10}, \forall i = 1, .., 10$.

Esercizio 5 *Calcolare la probabilità di accettare un valore del n.a.* X*, di cui al precedente esercizio, generato col metodo del rigetto (cfr paragrafo 1.2 delle note del corso). Sia* T *il n.a. che conta il numero di d'iterazioni necessarie ad accettare un valore di* X*. Qual'è l'insieme dei valori possibili di* T*? Qual'è la sua distribuzione?*

Esercizio 6 *Simulare il n.a.* X*, tale che* $I(X) = \{1, .., 4\}$ *e, posto* $\mathbb{P}(X = i) := p_i \quad i = 1, .., 4$,

$$\{p_1, .., p_4\} = \{0.3, 0.2, 0.35, 0.15\},$$

facendo uso del n.a. Y *tale che* $I(Y) = \{1, .., 4\}$ *e* $\mathbb{P}(Y = i) := q_i = \frac{1}{4}, \forall i = 1, .., 4$.

Se invece la distribuzione di Y *fosse*

$$\{q_1', .., q_4'\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\},$$

*la simulazione sarebbe più efficiente? (**Suggerimento**: comparare i valori della costante* c *che compare nel Teorema 6 delle note del corso, nei due casi).*

Esercizio 7 *Facendo uso del* metodo Monte Carlo dinamico *(cfr capitolo 3 delle note del corso) simulare la distribuzione di probabilità* $\pi = (0.3, 0.2, 0.35, 0.15)$.

2 Distribuzioni assolutamente continue

Esercizio 8 *Il n.a.* U *è uniformemente distribuito in* $[0, 2]$*. Determinare una funzione* $\phi(x)$ *tale che il n.a.* $X = \phi(U)$ *abbia distribuzione esponenziale di parametro 2.*

Esercizio 9 *Il n.a.* U *è uniformemente distribuito in* $[0, 1]$*. Determinare una funzione* $\phi(x)$ *tale che il n.a.* $X = \phi(U)$ *abbia funzione di distribuzione*

$$F(x) = \frac{x^2 + x}{2}, \quad x \in [0, 1].$$

Esercizio 10 *Simulare il n.a.* X *avente distribuzione* $\Gamma(2, 3)$*. (**Suggerimento** : calcolare la densità di probabilità del n.a.* $Y = Y_1 + Y_2$*, dove i n.a.* Y_i*,* $i = 1, 2$*, sono stocasticamente indipendenti ed identicamente distribuiti esponenzialmente con parametro 3).*

Esercizio 11 *Simulare un n.a.* X *avente densità di probabilità*

$$f(x) = 20x(1 - x)^3, \quad x \in (0, 1),$$

sapendo che il n.a. Y *ha distribuzione uniforme in* $(0, 1)$.

Esercizio 12 *Simulare un n.a.* X *avente distribuzione normale standard, sapendo che il n.a.* Y *ha distribuzione esponenziale di parametro 1. (**Suggerimento :** simulare prima il n.a.* $|X|$*).*

Esercizio 13 *Simulare un n.a.* X *avente densità di probabilità*

$$f(x) = \frac{e^x}{e - 1}, \quad x \in [0, 1].$$

Esercizio 14 *Simulare un n.a.* X *avente distribuzione* $N(1, 2)$.