Algebra
Compito del 22/02/2011

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1.
a. Trovare tutte le soluzioni $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ dell'equazione $345x - 851y = 276$.
b. Per quali $a \in \mathbb{Z}$ la congruenza $231x \equiv 55 \pmod{a}$ ha soluzione ?
c. Trovare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 17x \equiv 15 \pmod{189} \\ 5x \equiv 3 \pmod{48} \\ 15x \equiv 201 \pmod{336} \end{cases} .$$

Esercizio 2. Considerare l'insieme $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ con la seguente operazione:

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, 4^c b + d)$$

(ovviamente $a = [a]_3$, $c = [c]_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $b = [b]_7$, $d = [d]_7 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, le parentesi sono omesse per non appesantire le notazioni).
a. Verificare che G con l'operazione $*$ è un gruppo.
b. Verificare che i sottoinsiemi $H = \{(a, 0) \in G : a \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$ e $K = \{(0, b) \in G : b \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\}$ sono sottogruppi di G. Sono sottogruppi normali ?
c. Dimostrare che $G/K \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Esercizio 3.
a. Scrivere (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi abeliani di ordine 63375.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** calcolare il numero di elementi di ordine 195.
c. Descrivere gli elementi di ordine 195 per il gruppo che ne contiene esattamente 576.

Esercizio 4. Sia

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ 5b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, \mathbb{Z}) \right\} .$$

a. Verificare che A è un sottoanello commutativo di $\mathcal{M}(2, \mathbb{Z})$.
b. Per $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, sia

$$I_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ 5b & a \end{pmatrix} \in A \ t.c. \ a \equiv 0 \pmod{n} \right\} .$$

Per quali n, I_n è un ideale di A ?
c. Per i valori di n calcolati in **b** dire se l'ideale I_n è primo e/o massimale.

Esercizio 5. Sia $P(X) = X^4 - 10X^2 + 3 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il grado del campo di spezzamento di P su $K = \mathbb{F}_5$ e su $K = \mathbb{F}_7$.
b. L'anello $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
c. Sia F il campo di spezzamento di P su $\mathbb{F}_7$ e sia $\alpha \in F - \mathbb{F}_7$ una radice di P. Calcolare l'ordine di $2\alpha + 1$ in F^*.

Si devono svolgere gli esercizi 1, 2, 4 ed uno a scelta tra gli esercizi 3 e 5. Ogni esercizio vale 8 punti.