Compito Algebra V.O.

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Trovare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 7x \equiv 4 \pmod{45} \\ 50x \equiv 45 \pmod{55} \\ 4x \equiv 19 \pmod{33} \end{cases} .$$

Esercizio 2. Sia G un gruppo e sia $a \in G$. Sia $f_a : G \to G$ definita da $f_a(g) = aga^{-1}$, $\forall g \in G$.
a. Dimostrare che f_a è un isomorfismo.
b. Sia

$$H = \{ x \in G \ t.c. \ f_a(x) = x \} .$$

Dimostrare che $H < G$.
c. Dimostrare che $o(f_a)|o(a)$.

Esercizio 3. Si facciano corrispondere le lettere dell'alfabeto inglese ai numeri da 0 a 25 rispettando l'ordine e sia $f : \mathbb{Z}_{26} \to \mathbb{Z}_{26}$ definita da $f(x) = 3x + 5$ la chiave per la codifica.
a. si verifichi che f è invertibile e si calcoli f^{-1};
b. si decodifichi la parola UREEQ.

Esercizio 4. a. Trovare un generatore di $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ ed uno di $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$.
b. Dimostrare che $G = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ non è ciclico.
c. Per ogni divisore d di $60 = o(G)$ trovare il numero di elementi di G di ordine d.

Esercizio 5. Sia $P(X) = X^3 - 15X^2 + 21 \in K[X]$ con K campo.
a. $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ? $\mathbb{R}[X]/(P)$ è un campo ?
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su K per $K = \mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$, $\mathbb{F}_7$.
c. Sia α una radice di P. Calcolare l'inverso di $\alpha^2 + 1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Compito Algebra V.O.

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Trovare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 5 \pmod{33} \\ 6x \equiv 9 \pmod{21} \\ 4x \equiv -1 \pmod{77} \end{cases} .$$

Esercizio 2. a. Scrivere, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani di ordine 252.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** trovare il numero di elementi di ordine 28, di ordine 36 e di ordine 42.

Esercizio 3. Si facciano corrispondere le lettere dell'alfabeto inglese ai numeri da 0 a 25 rispettando l'ordine e sia $f : \mathbb{Z}_{26} \to \mathbb{Z}_{26}$ definita da $f(x) = 3x + 12$ la chiave per la codifica.
a. Si verifichi che f è invertibile e si calcoli f^{-1};
b. Si decodifichi la parola ZPRPTY.

Esercizio 4. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{10}$.
a. Trovare gli elementi invertibili ed i divisori di zero di A.
b. Verificare che la mappa $\varphi : A \longrightarrow A$ definita da $\varphi([x]_{12}, [y]_{10}) = ([4x]_{12}, [5y]_{10})$ è un omomorfismo di anelli.
c. Trovare $Ker\, \varphi$.

Esercizio 5. Sia $P(X) = X^3 + 14X + 7 \in K[X]$ con K campo.
a. $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ? $\mathbb{R}[X]/(P)$ è un campo ?
b. Trovare la fattorizzazione di P in $\mathbb{Z}_{11}[X]$.
c. Sia α una radice di P. Calcolare l'inverso di $\alpha^2 + 2$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Compito Algebra V.O.

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Trovare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 11x \equiv 13 \pmod{35} \\ 7x \equiv 56 \pmod{77} \\ 8x \equiv 9 \pmod{55} \end{cases} .$$

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1\ 4)(2\ 3\ 5\ 7) \in S_8$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_{10} tali che:

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (4\ 8\ 1\ 5)(2\ 6) \ ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (3\ 2\ 6)(1\ 5\ 8) \ .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_8 che commutano con σ ?

Esercizio 3. Si facciano corrispondere le lettere dell'alfabeto inglese ai numeri da 0 a 25 rispettando l'ordine e sia $f : \mathbb{Z}_{26} \to \mathbb{Z}_{26}$ definita da $f(x) = 5x + 2$ la chiave per la codifica.
a. Si verifichi che f è invertibile e si calcoli f^{-1};
b. Si decodifichi la parola FCYJWC.

Esercizio 4. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_{72}$.
a. Trovare gli elementi nilpotenti di A (ricordare che un elemento $\alpha \in A$ si dice nilpotente se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha^n = 0$).
b. Dire se le mappe $\varphi_9 : A \longrightarrow A$ definita da $\varphi_9([x]_{72}) = ([9x]_{72})$ e $\varphi_{10} : A \longrightarrow A$ definita da $\varphi_{10}([x]_{72}) = ([10x]_{72})$ sono omomorfismi di anelli.
c. Trovare $Ker\,\varphi_9$.

Esercizio 5. Sia $P(X) = X^3 + 33X + 77 \in K[X]$ con K campo.
a. $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ? $\mathbb{R}[X]/(P)$ è un campo ?
b. Trovare la fattorizzazione di P in $\mathbb{Z}_5[X]$.
c. Sia α una radice di P. Calcolare l'inverso di $\alpha^2 + 2$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.