

Fondamenti di Aritmetica - Compito del 15/04/2010
Riservato agli studenti fuori corso

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1.

- a. Trovare tutte le soluzioni $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ dell'equazione $627x - 891y = 99$.
- b. Trovare a tale che $(150a342)_7$ sia divisibile per 8.
- c. Trovare tutte le soluzioni della congruenza $2^x \equiv -4 \pmod{17}$.

Esercizio 2. Trovare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 34x \equiv -75 \pmod{161} \\ 40x \equiv 20 \pmod{345} \\ 20x \equiv 79 \pmod{441} \end{cases} .$$

Esercizio 3. Si facciano corrispondere le lettere dell'alfabeto inglese ai numeri da 0 a 25 rispettando l'ordine e sia $f : \mathbb{Z}_{26} \rightarrow \mathbb{Z}_{26}$ definita da $f(x) = 9x - 10$ la chiave per la codifica.

- a. Si calcoli f^{-1} ;
- b. decodificare la parola FAUVM.

Esercizio 4. Siano $R, S, T \in \mathbb{Q}[X]$ tali che

$$(2X^2 + X - 1)R + (6X^2 - 5X + 1)S = T .$$

Dire, giustificando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a. $2X - 1$ divide T ;
- b. se $X + 1$ divide T allora $X + 1$ divide anche S ;
- c. $T(0) \neq 0$;
- d. se $T(\frac{1}{3}) = 0$ allora $R(\frac{1}{3}) = 0$.

Esercizio 5. Si consideri l'anello $R = \mathbb{Z}_{11}[X]/(X^4 + X^3 - 5X - 5)$.

- a. Per ognuno dei seguenti elementi $Q \in R$ dire se è invertibile o un divisore di zero e trovare l'inverso o un elemento $S \in R - \{0\}$ tale che $QS = 0$ in R .
 - i) $Q = X^2 - 9$;
 - ii) $Q = X + 3$;
 - iii) $Q = X^2 - 2X - 3$.

Fondamenti di Aritmetica - Compito del 28/06/2010

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1.

- Trovare tutte le soluzioni $x, y \in \mathbb{Z}$ dell'equazione $782x - 3059y = 575$.
- Trovare a tale che $8 \mid (25a3006)_7$.
- Trovare le soluzioni di $3^x \equiv 5 \pmod{17}$.

Esercizio 2.

Trovare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 11x \equiv -27 \pmod{80} \\ 35x \equiv 40 \pmod{65} \\ -9x \equiv 25 \pmod{52} \end{cases} .$$

Esercizio 3.

Si facciano corrispondere le lettere dell'alfabeto inglese ai numeri da 0 a 25 rispettando l'ordine e sia $f : \mathbb{Z}_{26} \rightarrow \mathbb{Z}_{26}$ definita da $f(x) = 11x - 3$ la chiave per la codifica.

- Si calcoli f^{-1} ;
- si decodifichi la parola KHKPHKTWXXHON.

Esercizio 4.

Siano $P, Q \in K[X]$ con K campo, tali che

$$P \equiv Q \pmod{X^2 + 5} \quad \text{e} \quad P \equiv Q \pmod{X^2 - 6X - 6} .$$

- $K = \mathbb{Q}$, dimostrare che $P \equiv Q \pmod{(X^2 + 5)(X^2 - 6X - 6)}$ in $\mathbb{Q}[X]$.
- $K = \mathbb{Z}_7$, è vero che $P \equiv Q \pmod{(X^2 + 5)(X^2 - 6X - 6)}$ in $\mathbb{Z}_7[X]$?

Esercizio 5.

Sia $P = X^4 + 15X^2 + 15 \in K[X]$ con K campo.

- Trovare la fattorizzazione di P in $K[X]$ per $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Z}_7$ e $K = \mathbb{Z}_{13}$.
- Trovare, se esiste, l'inverso di $X^2 + 3$ in $\mathbb{Z}_{13}[X]/(P)$.

Fondamenti di Aritmetica - Compito del 26/07/2010

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1.

- Trovare tutte le soluzioni $x, y \in \mathbb{Z}$ dell'equazione $1394x + 5453y = -1025$.
- Trovare a tale che $10 \mid (43a582)_9$.
- Dire per quali $a \in \mathbb{Z}$ la congruenza $52x \equiv 91 \pmod{a}$ ha soluzione.

Esercizio 2.

 Trovare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 29x \equiv -6 \pmod{48} \\ 33x \equiv 22 \pmod{44} \\ -9x \equiv 14 \pmod{28} \end{cases} .$$

Esercizio 3. Si facciano corrispondere le lettere dell'alfabeto inglese ai numeri da 0 a 25 rispettando l'ordine e sia $f : \mathbb{Z}_{26} \rightarrow \mathbb{Z}_{26}$ definita da $f(x) = 5x + 2$ la chiave per la codifica.

- Si calcoli f^{-1} ;
- si decodifichi la parola GWUJGWUJIWFF.

Esercizio 4. Siano $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tali che

$$P \equiv Q \pmod{X^2 + 9} .$$

Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- P irriducibile $\implies Q$ irriducibile.
- $MCD(P, X^2 + 9) = MCD(Q, X^2 + 9)$.
- L'equazione $PA + QB = X + 3$ ha soluzioni $A, B \in \mathbb{Q}[X]$.

Esercizio 5. Sia $P = X^4 + 9X^2 - 15 \in K[X]$ con K campo.

- Trovare la fattorizzazione di P in $K[X]$ per $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Z}_7$ e $K = \mathbb{Z}_{11}$.
- Trovare, se esiste, l'inverso di $X^2 + 2$ in $\mathbb{Z}_{11}[X]/(P)$.

Fondamenti di Aritmetica - Compito del 27/09/2010

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1.

- Trovare tutte le soluzioni $x, y \in \mathbb{Z}$ dell'equazione $-1258x + 4921y = 925$.
- Trovare a tale che $7 \mid (542a53)_6$.
- Calcolare il resto della divisione di $5555^{4444} - 4444^{5555}$ per 13.

Esercizio 2.

Trovare le soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 9x \equiv 46 \pmod{91} \\ 35x \equiv 15 \pmod{45} \\ -13x \equiv 9 \pmod{21} \end{cases} .$$

Esercizio 3. Si facciano corrispondere le lettere dell'alfabeto inglese ai numeri da 0 a 25 rispettando l'ordine e sia $f : \mathbb{Z}_{26} \rightarrow \mathbb{Z}_{26}$ definita da $f(x) = 7x + 3$ la chiave per la codifica.

- Si calcoli f^{-1} ;
- si decodifichi la parola ZEDRFXZHZZFP.

Esercizio 4. Siano $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tali che $MCD(P, Q) = X^2 + 2$. Dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- P irriducibile $\implies Q$ irriducibile;
- se P è irriducibile, allora $P \mid Q$;
- P e Q hanno almeno una radice in comune in \mathbb{Q} ;
- se P e Q sono irriducibili, allora $P = Q$.

Esercizio 5. Sia $P = X^4 - 5X^2 - 5 \in K[X]$ con K campo.

- Trovare la fattorizzazione di P in $K[X]$ per $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Z}_7$ e $K = \mathbb{Z}_{11}$.
- Trovare, se esiste, l'inverso di $X^2 + 4$ in $\mathbb{Z}_{11}[X]/(P)$.