Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 20/12/2005

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Siano

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} \ ,$$

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} \ .$$

a. Dimostrare che $H_1 < GL_2(\mathbb{R})$ e che $H_2 < GL_2(\mathbb{R})$.
b. Dimostrare che $H_2 \lhd H_1$ ma che $H_2 \not\lhd GL_2(\mathbb{R})$.
c. Dimostrare che $H_1/H_2 \simeq \mathbb{R}^*$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1\ 8)(2\ 3\ 5) \in S_8$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_8 tali che:

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (4\ 8\ 1)(2\ 6) \ ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (3\ 2\ 6)(1\ 5\ 2) \ .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_8 che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo con unità e sia I un ideale di A. Definiamo *il radicale di* I come

$$\mathrm{rad}(I) = \{ \alpha \in A \ : \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \alpha^n \in I \} \ .$$

a. Dimostrare che $\mathrm{rad}(I)$ è un ideale di A e che $A/\mathrm{rad}(I)$ non ha elementi nilpotenti diversi da zero.
b. Sia P un ideale primo di A. Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha $\mathrm{rad}(P^m) = P$.
c. Sia $A = \mathbb{Z}$. Calcolare $\mathrm{rad}(I)$ per $I = (81)$ ed $I = (6300)$.

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^4 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ e sia $\alpha = \sqrt[4]{5} \in \mathbb{R}$.
a. Dimostrare che $P(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$ ma non è irriducibile in $\mathbb{R}[X]$.
b. Trovare l'inverso di $\alpha^2 + \alpha + 1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.
c. Sia F il campo di spezzamento di $P(X)$ su $\mathbb{Q}$. Dimostrare che $[F : \mathbb{Q}] = 8$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 26/07/2006

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo abeliano finito di ordine n e sia $f : G \to G$ l'omomorfismo definito da $f(a) = a^{-1}$ per ogni $a \in G$.
a. Sia $G^2 = \{ g^2 : g \in G \}$. Dimostrare che $G^2 < G$.
b. Sia $H = \{ g \in G : f(g) = g \}$. Dimostrare che $H < G$ e che se n è dispari allora $H = \{e\}$.
c. Dimostrare che $G/H \simeq G^2$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo abeliano di ordine 360.
a. Scrivere, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani di ordine 360.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** trovare il numero degli elementi di ordine 60. Tali elementi formano un sottogruppo ?
c. Si consideri il gruppo del punto **a** con il minor numero (> 0) di elementi di ordine 60. Scrivere tutti gli elementi di ordine 60 di tale gruppo.

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo con unità ed I un ideale di A. Sia $Ann(I) = \{ \alpha \in A : \alpha\beta = 0 \ \forall \beta \in I \}$.
a. Dimostrare che $Ann(I)$ è un'ideale di A. Calcolare $Ann(A)$ e $Ann(0)$.
b. Dimostrare che se $\alpha = \alpha^2$ allora $A/Ann((\alpha)) \simeq (\alpha)$.

Esercizio 4. Sia $P = X^3 + 2X + 5 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento F di P su K per $K = \mathbb{F}_5$ e $K = \mathbb{F}_3$.
b. Dimostrare che $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo.
c. Sia α una radice di P. Trovare l'inverso di $\alpha^2 + 3$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 26/09/2006

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Siano

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ a \in \mathbb{Z} \right\} \text{ e } H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2^a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ a \in \mathbb{Z} \right\} \bigcup \{I\}$$

dove I è la matrice identità.
a. Dire se H_1 e H_2 sono sottogruppi di $GL_2(\mathbb{R})$.
Fissato $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) sia

$$K_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ b \equiv 0 \pmod{n} \right\} .$$

b. Dimostrare che $K_n \lhd H_1$ per ogni n.
c. Dimostrare che $H_1/K_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1\ 5\ 7)(2\ 3\ 4\ 9) \in S_9$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_9 tali che:

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (2\ 4\ 9\ 8)(3\ 5\ 6) \ , \ \tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (3\ 2\ 6)(1\ 5\ 7) \ .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_9 che commutano con σ ?

Esercizio 3. Siano A un anello commutativo con unità ed X un insieme. Sia $\mathcal{M}(X, A)$ l'anello delle funzioni da X in A con le operazioni $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$ (operazioni a sinistra in $\mathcal{M}(X, A)$ ed a destra in A).
a. Sia U un sottoinsieme qualsiasi di X e sia

$$I(U) = \{f \in \mathcal{M}(X, A) \ t.c. \ f(u) = 0 \ \forall \, u \in U \} \ .$$

Dimostrare che $I(U)$ è un ideale di $\mathcal{M}(X, A)$.
b. Sia $x \in X$, dimostrare che se A è un dominio allora $I(\{x\})$ è un ideale primo.
c. Sia $x \in X$, dimostrare che se $I(\{x\})$ è primo allora A è un dominio.

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^3 - 6X^2 + 15 \in K[X]$ con K campo.
a. $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ? $\mathbb{R}[X]/(P)$ è un campo ?
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su K per $K = \mathbb{F}_2 \, , \mathbb{F}_3 \, , \mathbb{F}_5$.
c. Sia α una radice di P. Calcolare l'inverso di $\alpha^2 + \alpha + 1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 22/11/2006 - Sessione Straordinaria

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} .$$

a. Dimostrare che $H < GL_2(\mathbb{R})$.
b. Dimostrare che $H \simeq \mathbb{C}^*$.

Esercizio 2. a. Trovare un generatore di $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ ed uno di $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$.
b. Dimostrare che $G = (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ non è ciclico.
c. Sia m il massimo tra gli ordini degli elementi di G. Trovare il numero di elementi di G di ordine m.

Esercizio 3. Sia

$$I = \{ \, a + b\sqrt{2} \, : \, a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } a \equiv 0 \pmod 2 \, \} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \, .$$

a. Dimostrare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
b. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/I \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^3 + 14X^2 + 21 \in K[X]$ con K campo.
a. $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ? $\mathbb{R}[X]/(P)$ è un campo ?
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su K per $K = \mathbb{F}_2 \, , \mathbb{F}_3 \, , \mathbb{F}_5$.
c. Sia α una radice di P. Calcolare l'inverso di $\alpha^2 + 3$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.