Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 09/01/2007

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Siano $S =< (1\ 2) >$ e $T =< (2\ 3) >$ due sottogruppi di S_3.
a. Dimostrare che $ST = \{\sigma\tau \,:\, \sigma \in S \text{ e } \tau \in T\}$ non è un sottogruppo di S_3.
Sia G un gruppo e sia $H < G$. Sia $K = \{a \in G \,:\, ah = ha\ \forall\, h \in H\}$.
b. Dimostrare che $K < G$ e che $HK = \{hk \,:\, h \in H \text{ e } k \in K\} < G$.
c. Supponiamo $HK = G$. Dimostrare che $K/(H \bigcap K) \simeq G/H$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1\ 9\ 4)(2\ 10\ 5\ 7) \in S_{10}$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_{10} tali che:

$$\tau_1\sigma\tau_1^{-1} = (4\ 8\ 1\ 10)(2\ 6\ 5)\ ,$$

$$\tau_2\sigma\tau_2^{-1} = (3\ 2\ 6)(1\ 5\ 2\ 8)\ .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_{10} che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo con unità. Un elemento $a \in A$ si dice *idempotente* se $a^2 = a$.
a. Dimostrare che se a è idempotente allora $1 - a$ è idempotente.
b. Dimostrare che se A è un dominio allora gli unici idempotenti sono 1 e 0.
c. Sia $a \in A$ idempotente. Dimostrare che $A \simeq (a) \times (1-a)$ (dove (b) indica l'ideale di A generato da b).
Sugg. Per la surgettività può essere utile considerare l'elemento $ax + (1 - a)y \in A$ come controimmagine di $(ax, (1-a)y) \in (a) \times (1-a)$.

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^6 - 30X^3 + 125 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento F di P su K per $K = \mathbb{Q}$.
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su K per $K = \mathbb{F}_7$. (Notare che $2^3 = 1$ in $\mathbb{F}_7$)
c. Sia $\alpha = \sqrt[3]{5}$ una radice di P. Calcolare l'inverso di $\alpha^2 + 3$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 20/07/2007

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo e fissiamo due elementi $g \in G$ e $\varphi \in Aut(G)$.
a. Sia $H_\varphi = \{a \in G \, : \, \varphi(a) = a\}$. Dimostrare che $H_\varphi < G$.
b. Sia $K_g = \{\varphi \in Aut(G) \, : \, \varphi(g) = g\}$. Dimostrare che $K_g < Aut(G)$.
c. Dimostrare che se G è abeliano allora G/H_φ è isomorfo ad un sottogruppo di G.

Esercizio 2. Sia G un gruppo abeliano di ordine 4312.
a. Scrivere, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani di ordine 4312.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** trovare il numero degli elementi di ordine 308.
c. Trovare, se esiste, un gruppo abeliano di ordine 4312 con almeno un elemento di ordine 88 e nessun elemento di ordine 392.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \, : \, a, b \in \mathbb{Z}\}$.
a. Dimostrare che $(7, 3 + X)$ è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[X]$.
b. Dimostrare che $7 \in (3 + \sqrt{2})$ (dove $(3 + \sqrt{2})$ è l'ideale generato da $3 + \sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$).
c. Dimostrare che $(3 + \sqrt{2})$ è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Esercizio 4. Sia $P = X^4 - 5X^3 + 15X^2 - 10X + 5 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su K per $K = \mathbb{F}_2$, $K = \mathbb{F}_3$ e $K = \mathbb{F}_7$.
b. L'anello $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
c. Sia α una radice di $P \in \mathbb{Q}[X]$. Trovare l'inverso di $\alpha^2 - 3$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 21/09/2007

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo ciclico di ordine finito n generato da α. Sia H_d il sottogruppo di G di ordine d.
a. Verificare che esiste un sottogruppo K di G tale che $H_d \simeq G/K$.
b. Dimostrare che $G \simeq H_d \times K$ se e solo se $(d, \frac{n}{d}) = 1$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo abeliano di ordine 3500.
a. Scrivere, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani di ordine 3500.
b. Trovare, se esiste, un gruppo abeliano di ordine 3500 con almeno un elemento di ordine 28 e nessun elemento di ordine 25.
c. Trovare, se esiste, un gruppo abeliano di ordine 3500 con almeno un elemento di ordine 100 e nessun elemento di ordine 175.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
a. Dimostrare che $(11, 5 - \sqrt{3}) = (1 + 2\sqrt{3})$ (ideali di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$).
b. Dimostrare che $(1 + 2\sqrt{3})$ è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Esercizio 4. Sia $P = X^4 + 33X^2 + 19 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su K per $K = \mathbb{F}_{11}$, e $K = \mathbb{F}_7$.
b. L'anello $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
c. Sia α una radice di $P \in \mathbb{Q}[X]$. Trovare l'inverso di $\alpha^2 - 5$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 26/11/2007

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo abeliano e sia p un numero primo. Definiamo

$$P = \{a \in G \, : \, o(a) \text{ è una potenza di } p\} \, .$$

a. Verificare che $P < G$.
b. Verificare che in G/P non ci sono elementi di ordine p.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1\ 2\ 4\ 5)(7\ 8\ 9) \in S_9$.
a. Calcolare l'ordine di σ. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_9 tali che:

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (4\ 8\ 1)(2\ 6\ 3\ 9) \ ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (3\ 2\ 6)(1\ 5\ 2\ 9) \ .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_9 che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia $I = (2X + 3, X + 6)$ un ideale di $\mathbb{Z}[X]$.
a. Verificare che I non è un ideale principale.
b. Verificare che $9 \in I$ e che $1 \notin I$.
c. Dimostrare che I non è un ideale primo.

Esercizio 4. Sia $P(X) = (X^2 - 2)(X^2 - 11)$.
a. Trovare il campo di spezzamento K di P su $\mathbb{F}_{13}$ e su $\mathbb{F}_{17}$.
b. Verificare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{11}) = \{a + b\sqrt{11} \, : \, a, b \in \mathbb{Q}\}$.
c. Trovare il campo di spezzamento K di P su $\mathbb{Q}$ e calcolarne il grado.