Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 07/01/2009

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo e siano K ed N due sottogruppi di G con N normale in G.
a. Dimostrare che $K \bigcap N \lhd K$ e che $KN < G$.
b. Dimostrare che $K/K \bigcap N \simeq KN/N$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1\ 2)(4\ 5)(7\ 8\ 9) \in S_9$.
a. Calcolare l'ordine di σ. Dire se la permutazione σ è pari o dispari e verificare che σ commuta con $\tau = (1\ 4)(2\ 5)$.
b. Trovare, se esistono, τ_1 , $\tau_2 \in S_9$ tali che

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (2\ 9)(3\ 7)(5\ 6\ 8)\ ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (2\ 3\ 9\ 7)(5\ 6\ 8)(2\ 3\ 9\ 7)\ .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_9 che commutano con σ ?
(Avvertimento: per trovare il numero di coniugati osservare che ci sono due cicli della stessa lunghezza quindi fare attenzione a $(a\ b)(c\ d) = (c\ d)(a\ b)$)

Esercizio 3. Sia p un numero primo e sia

$$I = \{a + b\sqrt{p} \in \mathbb{Z}[\sqrt{p}]\ t.c.\ a \equiv 0 \pmod{p}\}\ .$$

a. Verificare che I è un ideale primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$.
b. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]/I \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $P = X^4 + 11X^3 - 10X^2 + 27 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su K per $K = \mathbb{F}_5$ e $K = \mathbb{F}_{11}$.
b. Sia $\alpha \notin \mathbb{F}_5$ una radice di P: trovare l'ordine di $\alpha + 2$ in $\mathbb{F}_5(\alpha)^*$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 17/04/2009 - Riservato a fuori corso e laureandi

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo ed H un suo sottogruppo.
a. Dimostrare che per ogni $g \in G$, gHg^{-1} è un sottogruppo di G.
b. Supponiamo che H sia l'unico sottogruppo di G di ordine d. Dimostrare che H è un sottogruppo normale di G.
c. Sia $o(G) = 10$: dimostrare che se G ha un sottogruppo normale di ordine 2 allora è abeliano. Esistono gruppi di ordine 10 non abeliani ?

Esercizio 2. Sia $\sigma = (2\ 5\ 6)(1\ 3\ 4\ 8) \in S_9$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_9 tali che:

$$\tau_1\sigma\tau_1^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)\ ,$$

$$\tau_2\sigma\tau_2^{-1} = (2\ 6\ 5)(9\ 7\ 8\ 3)(2\ 6\ 5)\ .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_9 che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia $n \geq 1$ un intero fissato e p un primo.
a. Dire quali dei seguenti insiemi sono ideali di $\mathbb{Z}[X]$

$$I_1 = \{P \in \mathbb{Z}[X]\, t.c.\ \deg P \geq n\} \bigcup \{0\}\ ;$$

$$I_2 = \{P \in \mathbb{Z}[X]\, t.c.\ \deg P \leq n\}\ ;$$

$$I_3 = \left\{P = \sum a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]\, t.c.\ p|a_i\ \forall\, i \text{ e } a_0 = 0\right\}\ ;$$

b. Quali tra gli ideali del punto precedente sono primi ?

Esercizio 4. Sia $P = X^4 + 5X^2 - 5 \in K[X]$ con K campo.
a. P è irriducible in $\mathbb{Q}[X]$?
b. Trovare il campo di spezzamento di P su K per $K = \mathbb{F}_{11}$.
c. Sia F il campo di spezzamento di P su $\mathbb{F}_{11}$ e sia $\alpha \in F$ una radice di P non in $\mathbb{F}_{11}$. Trovare l'ordine di $\alpha + 1$ in F^*.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 25/06/2009 - Appello straordinario per laureandi

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Siano

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ t.c. \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} ,$$

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ t.c. \ a, b \in \mathbb{Z} \right\} .$$

a. Verificare che $H_1 < GL_3(\mathbb{Z})$.
b. Verificare che $H_2 \lhd H_1$.
c. Dimostrare che $H_1/H_2 \simeq \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (2\ 1\ 4\ 7)(5\ 3\ 6\ 9\ 8) \in S_9$.
a. Calcolare l'ordine di σ. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, τ_1 , $\tau_2 \in S_9$ tali che

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)(6\ 9\ 8\ 7) ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(5\ 6)(5\ 7)(5\ 8)(5\ 9) .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_9 che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia

$$\mathbb{Z}_{(5)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \ t.c. \ 5 \nmid n \right\} .$$

a. Verificare che $\mathbb{Z}_{(5)}$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.
b. Quali sono gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{(5)}$?
c. Sia (5) l'ideale generato da 5 in $\mathbb{Z}_{(5)}$. Dimostrare che $\mathbb{Z}_{(5)}/(5) \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $P = X^4 - 14X^2 + 26 \in K[X]$ con K campo.
a. Gli anelli $\mathbb{Q}[X]/(P)$ e $\mathbb{F}_{11}[X]/(P)$ sono campi ?
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su $\mathbb{F}_{11}$.
c. Sia α una radice di P in F. Calcolare l'inverso di $\alpha + 2$ in F^*.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 20/07/2009

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Siano

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \ t.c. \ a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

e, $\forall\, n \geq 1$, $H_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \ t.c. \ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a. Verificare che $H < GL_2(\mathbb{R})$.
b. Verificare che $H_n \lhd H$ per ogni $n \geq 1$.
c. Dimostrare che $H_n \simeq \boldsymbol{\mu}_n = \{\, x \in \mathbb{C}^* \ t.c. \ x^n = 1 \,\}$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo abeliano di ordine 4840.
a. Scrivere, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani di ordine 4840.
b. A quale dei gruppi trovati nel punto **a** sono isomorfi i seguenti gruppi

$$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}/1210\mathbb{Z} \ , \qquad (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}/242\mathbb{Z} \ ,$$

$$(\mathbb{Z}/41\mathbb{Z})^* \times \boldsymbol{\mu}_{121} \text{ dove } \boldsymbol{\mu}_{121} = \{\, x \in \mathbb{C}^* \ t.c. \ x^{121} = 1 \,\} \ .$$

c. Trovare, se esistono, i gruppi abeliani di ordine 4840 con elementi di ordine 20 e nessun elemento di ordine 605. Quanti elementi di ordine 20 ci sono in tali gruppi ?

Esercizio 3. Un anello si dice *locale* se ha un solo ideale massimale.
a. Quali dei seguenti anelli sono locali

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \ , \ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \ , \ \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \ , \ \mathbb{Z}/75\mathbb{Z} \ , \ \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \ , \ \mathbb{Z}/32\mathbb{Z} \ .$$

b. Per quali $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ l'anello $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ è locale ?
c. Sia m tale che $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ è locale e sia P il suo unico ideale massimale. Descrivere il campo $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/P$.

Esercizio 4. Sia $P = X^4 + 6X^2 - 6 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su $\mathbb{F}_7$ e su $\mathbb{F}_{11}$.
b. L'anello $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
c. Sia F il campo di spezzamento di P su $\mathbb{F}_{11}$ e sia $\alpha \in F$ una radice di P. Calcolare $o(\alpha + 2)$ in F^*.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 23/09/2009

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia

$$H_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ t.c. \ 22x + 121y = 0 \} \ .$$

a. Verificare che $H_1 \lhd \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
b. Dimostrare che $H_1 \simeq \mathbb{Z}$.
c. Dimostrare che $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/H_1 \simeq \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo abeliano di ordine 148225.
a. Scrivere, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani di ordine 148225.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** scrivere il numero di elementi di ordine 1925.
c. Si consideri il gruppo del punto **a** con il minor numero (> 0) di elementi di ordine 1925. Descrivere tutti gli elementi di ordine 1925 di tale gruppo.

Esercizio 3. Sia p un numero primo e sia

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \ t.c. \ p \nmid n \right\} \ .$$

a. Verificare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$.
b. Quali sono gli ideali di $\mathbb{Z}_{(p)}$?
c. Dimostrare che $\mathbb{Z}_{(p)}$ ha un unico ideale massimale (indicato con P) e dimostrare che $\mathbb{Z}_{(p)}/P \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $P = X^4 + 16X^2 + 6 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su $\mathbb{F}_5$ e su $\mathbb{F}_{11}$.
b. L'anello $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
c. Sia F il campo di spezzamento di P su $\mathbb{F}_{11}$ e sia $\alpha \in F - \mathbb{F}_{11}$ una radice di P. Calcolare $o(\alpha + 2)$ in F^*.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 17/11/2009 - Appello straordinario per laureandi

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Siano

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ t.c.\ a, b \in \mathbb{Z} \right\} ,$$

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2-a}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ t.c.\ a \in \mathbb{Z} \right\} .$$

a. Verificare che $H_1 < GL_3(\mathbb{Z})$.
b. Verificare che $H_2 \lhd H_1$.
c. Dimostrare che $H_1/H_2 \simeq \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (2\ 3)(5\ 1\ 6\ 9\ 8) \in S_{10}$.
a. Calcolare l'ordine di σ. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, τ_1 , $\tau_2 \in S_{10}$ tali che

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (1\ 5)(1\ 4)(4\ 5)(6\ 9\ 8\ 7\ 10) ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (5\ 2\ 3\ 4)(10\ 7\ 8\ 9\ 1)(5\ 2\ 3\ 4)(5\ 3) .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_{10} che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}\ :\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ e sia $I = (5)$ l'ideale generato da 5 in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Consideriamo il quoziente $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/I$.
a. Verificare che se $a \equiv 0 \pmod 5$ allora $a + b\sqrt{5} + I$ è nilpotente in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/I$.
b. Verificare che se $a \not\equiv 0 \pmod 5$ allora $a + b\sqrt{5} + I$ è invertibile in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/I$.
c. Quali sono gli ideali di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/I$?

Esercizio 4. Sia $P = X^4 - 12X^2 + 35 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il grado del campo di spezzamento di P su $\mathbb{Q}$.
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su $\mathbb{F}_{13}$.
c. Sia α una radice di P in F. Calcolare l'ordine di $\alpha + 1$ in F^*.