Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 11/01/2010

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo con $o(G) = p^3$ (con p primo). Sia G' il sottogruppo dei commutatori di G e sia $Z(G)$ il centro di G.
a. Dimostrare che o G è abeliano o $Z(G) = G'$. (Sugg. Porre $o(Z(G)) = p^i$ e studiare i vari casi per $i = 0, 1, 2, 3$).
b. Fornire un esempio di gruppo non abeliano di ordine p^3 (per un primo p fissato) e verificare $Z(G) = G'$ per l'esempio scelto.

Esercizio 2. a. Scrivere (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi abeliani di ordine 7875.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** calcolare il numero di elementi di ordine 525.
c. Sia H il gruppo con il minor numero (> 0) di elementi di ordine 525. Descrivere tali elementi.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}[\sqrt{11}] = \{a + b\sqrt{11} \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}\}$
a. Dimostrare che l'ideale $(7, 2 + X)$ è massimale in $\mathbb{Z}[X]$.
b. Verificare che $7 \in (2 + \sqrt{11})$ (ideale in $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$).
c. Dimostrare che l'ideale $(2 + \sqrt{11})$ è massimale in $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$.

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^4 + X^3 - 5X - 5 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il grado del campo di spezzamento di P su $K = \mathbb{Q}$.
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su $K = \mathbb{F}_{11}$.
c. Sia $\alpha \in F - \mathbb{F}_{11}$ una radice di P. Trovare l'ordine di $\alpha + 3$ in F^* .

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 15/04/2010 - Riservato ai fuori corso

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo e sia $a \in G$. Definiamo

$$H(a) = \{\sigma \in Aut(G) \ t.c. \ \sigma(a) = a\} \ .$$

a. Verificare che $H(a) < Aut(G)$.
b. Dimostrare che $H(a)$ è un sottogruppo normale di $Aut(G)$ se e solo se $H(\tau(a)) = H(a)$ per ogni $\tau \in Aut(G)$.
c. Dimostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $A = \{\sigma(a) \ : \ \sigma \in Aut(G)\}$ e $B = \{classi\ laterali\ sinistre\ di\ H(a)\ in\ Aut(G)\}$ (cioè le classi laterali $\sigma H(a)$).

Esercizio 2. Sia $\sigma = (3\ 4\ 9)(2\ 1\ 5\ 7) \in S_9$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_9 tali che:

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7) \ ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (9\ 4\ 3)(6\ 2\ 8\ 1)(9\ 4\ 3) \ .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_9 che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia A un dominio, $Q(A)$ il suo campo dei quozienti e P un ideale primo.
a. Verificare che $S = A - P$ è un sistema moltiplicativo, cioè che $0 \notin S$, $1 \in S$ e per ogni $a, b \in S$ si ha che $ab \in S$.
b. Considerare il dominio

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \in Q(A) \ t.c. \ a \in A \text{ e } s \in S \right\}$$

(le operazioni sono le stesse di $Q(A)$). Dimostrare che

$$S^{-1}P = \left\{ \frac{a}{s} \in Q(A) \ t.c. \ a \in P \text{ e } s \in S \right\}$$

è l'unico ideale massimale di $S^{-1}A$.

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^4 + 1 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su $K = \mathbb{F}_{11}$.
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su $K = \mathbb{F}_{13}$.
c. Sia $\alpha \in F$ una radice di P. Trovare l'inverso di $\alpha + 2$ in F^* .

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 26/07/2010

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia $n \geq 2$ e siano

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ e } ad - bc = 1 \right\} ,$$

$$H_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ : \ a \equiv d \equiv 1 \pmod{n} \text{ e } b \equiv c \equiv 0 \pmod{n} \right\} .$$

a. Verificare che per ogni $n \geq 2$ si ha $H_n \lhd SL_2(\mathbb{Z})$.
b. Sia

$$SL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ e } ad - bc \equiv 1 \pmod{n} \right\} .$$

Dimostrare che $SL_2(\mathbb{Z})/H_n$ è isomorfo ad un sottogruppo di $SL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) \in S_9$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ? Verificare che σ commuta con $(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$.
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_9 tali che:

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (4\ 8\ 1)(2\ 6\ 5) ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (3\ 4)(5\ 8)(3\ 5\ 2\ 8)(1\ 9)(1\ 7)(3\ 5\ 2\ 8) .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_9 che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}] = \{a + b\sqrt{-7} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
a. Verificare che l'ideale (11) non è primo in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.
b. Quali sono i divisori di zero in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]/(11)$?

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^6 - 11X^3 + 30 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su $K = \mathbb{F}_{11}$.
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su $K = \mathbb{F}_{13}$.
c. Sia $\alpha \in F - \mathbb{F}_{13}$ una radice di P. Trovare l'inverso di $\alpha + 1$ in F^* .

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 27/09/2010

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Siano

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ; \ a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ e } ad-bc=1 \right\} \ ,$$

$$H_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \ ; \ c \equiv 0 \pmod{n} \right\} \ ,$$

$$K_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_n \ ; \ a \equiv 1 \pmod{n} \right\} \ .$$

a. Verificare che per ogni $n \geq 2$ si ha $H_n < SL_2(\mathbb{Z})$ e $K_n < H_n$.
b. È vero che $H_n \lhd SL_2(\mathbb{Z})$? È vero che $K_n \lhd H_n$?
c. Dimostrare che $H_n/K_n \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Esercizio 2. a. Scrivere (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi abeliani di ordine 1404.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** calcolare il numero di elementi di ordine 234.
c. Sia H il gruppo con il minor numero (> 0) di elementi di ordine 234. Descrivere tali elementi.

Esercizio 3. Sia $X = \{a, b, c\}$ un insieme di tre elementi e per ogni $n \geq 2$ sia $F(X, n)$ l'anello delle funzioni $f : X \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con le operazioni $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f \otimes g)(x) = f(x)g(x)$.
a. Dire quali dei seguenti ideali sono primi e/o massimali

$$I_7(a,b) = \{f \in F(X,7) \ ; \ f(a) = f(b) = 0\} \ ,$$

$$I_6(a,b) = \{f \in F(X,6) \ ; \ f(a) = f(b) = 0\} \ ,$$

$$I_7(a) = \{f \in F(X,7) \ ; \ f(a) = 0\} \ ,$$

$$I_6(a) = \{f \in F(X,6) \ ; \ f(a) = 0\} \ .$$

b. Sia $F(X, \mathbb{Z})$ l'anello delle funzioni da X in $\mathbb{Z}$ (stesse operazioni definite in precedenza). L'ideale $I_{\mathbb{Z}}(a) = \{f \in F(X, \mathbb{Z}) \ ; \ f(a) = 0\}$ è primo e/o massimale ?

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^4 + X^3 - 9X - 9 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il grado del campo di spezzamento di P su $K = \mathbb{Q}$.
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su $K = \mathbb{F}_{13}$.
c. Sia $\alpha \in F - \mathbb{F}_{13}$ una radice di P. Trovare l'inverso di $\alpha + 1$ in F^*.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 17/11/2010 - Riservato ai laureandi

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con la naturale struttura del prodotto diretto. Fissati due interi m ed n, siano $H =< (m, 0), (0, n) >$ (il sottogruppo di $\mathbb{Z}^2$ generato da $(m, 0)$ e da $(0, n)$) e $K =< (m, n) >$ (il sottogruppo di $\mathbb{Z}^2$ generato da (m, n)).
a. Dimostrare che $\mathbb{Z}^2/H \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
b. Dimostrare che $H/K \simeq \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. a. Scrivere (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi abeliani di ordine 33957.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** calcolare il numero di elementi di ordine 1617.
c. Sia H il gruppo con il minor numero (> 0) di elementi di ordine 1617. Descrivere tali elementi.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{M}(2, \mathbb{Q})$ l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Per ogni $A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{Q})$ definiamo $C(A) = \{M \in \mathcal{M}(2, \mathbb{Q})\ t.c.\ AM = MA\}$.
a. Dimostrare che $C(A)$ è un sottoanello di $\mathcal{M}(2, \mathbb{Q})$.
b. Per $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ descrivere gli elementi di $C(A)$.
c. Per $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dimostrare che $C(A) \simeq \mathbb{Q}[X]/(X^2)$.

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^4 + 2X^3 - 12 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il grado del campo di spezzamento di P su $K = \mathbb{F}_7$ e su $K = \mathbb{F}_{11}$.
b. L'anello $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
c. Sia F il campo di spezzamento di P su $\mathbb{F}_{11}$ e sia $\alpha \in F - \mathbb{F}_{11}$ una radice di P. Trovare l'inverso di $\alpha + 2$ in F.