Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 12/01/2011

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Per ogni $n \geq 3$ sia $S_n(3)$ l'insieme di tutti i cicli di lunghezza 3 di S_n .
a. Verificare che $S_3(3) \bigcup \{id\}$ è un sottogruppo di S_3 .
b. Per $n \geq 4$, $S_n(3) \bigcup \{id\}$ è un sottogruppo di S_n ?
c. Calcolare S'_3 (il sottogruppo dei commutatori di S_3) e verificare che $S_3/S'_3 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 2.
a. Scrivere (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi abeliani di ordine 22869.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** calcolare il numero di elementi di ordine 231.
c. Descrivere gli elementi di ordine 231 per il gruppo che ne contiene esattamente 480.

Esercizio 3. Sia $I = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \ t.c. \ a^2 - 5b^2 \equiv 0 \pmod 2 \}$.
a. Verificare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
b. L'ideale I è primo ? L'ideale I è massimale ?

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^4 + 3X + 27 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il grado del campo di spezzamento di P su $K = \mathbb{F}_2$ e su $K = \mathbb{F}_7$.
b. L'anello $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
c. Sia F il campo di spezzamento di P su $\mathbb{F}_7$ e sia $\alpha \in F - \mathbb{F}_7$ una radice di P. Trovare l'inverso di $\alpha + 2$ in F.