Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Esercitazione

Esercizio 1. Siano

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrici in $GL_2(\mathbb{R})$.
a. Calcolare l'ordine di S, ST e TS.
b. Sia $H =< T >$ il sottogruppo generato da T. Dimostrare che $H \simeq \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo abeliano di ordine 1764.
a. Scrivere, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani di ordine 1764.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** scrivere il numero di elementi di ordine 126.
c. Per ognuno dei gruppi del punto **a** calcolare $\max\{\, o(g) \ : \ g \in G \,\}$ (il massimo tra gli ordini degli elementi di G).

Esercizio 3. Sia A l'anello $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
a. Trovare A^*, l'insieme degli elementi invertibili di A, e $D_0(A)$, l'insieme dei divisori di zero di A.
b. Verificare che $A^* \bigcup D_0(A) = A - \{0\}$.
c. Sia $\varphi_5 : A \longrightarrow A$ la mappa definita da $\varphi_5([x]_7, [y]_{10}) = ([x]_7, [5y]_{10})$ per ogni $([x]_7, [y]_{10}) \in A$. Dimostrare che φ_5 è un omomorfismo. Trovare $Ker\,\varphi_5$ e dimostrare che $Im\,\varphi_5 \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^3 + 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
a. $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ? $\mathbb{R}[X]/(P)$ è un campo ?
b. Sia α una radice di P. Calcolare l'inverso di $\alpha^2 + 1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.
c. Sia F il campo di spezzamento di P su $\mathbb{Q}$. Dimostrare che $[F : \mathbb{Q}] \leq 6$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Esercitazione

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo e sia $a \in G$. Sia $f_a : G \to G$ definita da $f_a(g) = aga^{-1}$, $\forall g \in G$.
a. Dimostrare che f_a è un isomorfismo.
b. Sia

$$H = \{ \, x \in G \ t.c. \ f_a(x) = x \, \} \ .$$

Dimostrare che $H < G$.
c. Dimostrare che $o(f_a) | o(a)$.

Esercizio 2. a. Trovare un generatore di $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ ed uno di $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$.
b. Dimostrare che $G = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ non è ciclico.
c. Per ogni divisore d di $60 = o(G)$ trovare il numero di elementi di G di ordine d.

Esercizio 3. Siano A un anello commutativo con unità ed I, J ideali di A. Sia

$$(I : J) = \{ \, a \in A \ t.c. \ aJ \subset I \, \} \ .$$

a. Dimostrare che $(I : J)$ è un ideale di A.
b. Sia $A = \mathbb{Z}$. Calcolare $((45) : (5))$, $((7) : (20))$ e $((42) : (12))$.
c. Sia $A = \mathbb{Z}$, p un primo ed n un intero primo con p. Dimostrare che $((p) : (n)) = (p)$.

Esercizio 4. Sia $P(X) = X^3 - 15X^2 + 21 \in K[X]$ con K campo.
a. $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ? $\mathbb{R}[X]/(P)$ è un campo ?
b. Trovare il campo di spezzamento F di P su K per $K = \mathbb{F}_3 \, , \mathbb{F}_5 \, , \mathbb{F}_7 \, .$
c. Sia α una radice di P. Calcolare l'inverso di $\alpha^2 + 1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.