Esercizi di riepilogo: Teoria dei gruppi.

1. Sia G un gruppo di ordine p^3 con p primo. Dimostrare che se G non è abeliano allora $o(Z(G)) = p$.

2. Sia G un gruppo e sia $D = \{ (a,a) \in G \times G \, : \, a \in G \}$.

- **a)** Dimostrare che $D < G \times G$.
- **b)** Dimostrare (con un esempio) che, in generale, D non è un sottogruppo normale di $G \times G$.
- **c)** Sia G abeliano. Dimostrare che $(G \times G)/D \simeq G$.

3. Dire quali tra le seguenti mappe sono omomorfismi di gruppi.

- **a)** $Tr \, : \, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ la traccia (cioè la somma degli elementi della diagonale della matrice).
- **b)** $Tr \, : \, GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ la traccia.
- **c)** $\det \, : \, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ il determinante.
- **d)** $\det \, : \, GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ il determinante.
- **e)** $f \, : \, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ data da $f(A,B) = A - B$.
- **f)** $f \, : \, GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ data da $f(A,B) = A - B$.
- **g)** $f \, : \, GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ data da $f(A,B) = AB^{-1}$.

4. Siano H e K sottogruppi normali di un gruppo G.

- **a)** Dimostrare che $H \bigcap K \lhd G$.
- **b)** Dimostrare che $G/(H \bigcap K)$ è isomorfo ad un sottogruppo di $G/H \times G/K$.
- **c)** Dimostrare (con un esempio) che, in generale, $G/(H \bigcap K)$ non è isomorfo a $G/H \times G/K$.
- **d)** Sia $G = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ e siano $H =< 3 >$, $K =< 2 >$. Definire un isomorfismo $G/(H \bigcap K) \longrightarrow G/H \times G/K$.

5. Dimostrare che $Aut(S_3) \simeq S_3$.

6. Sia G un gruppo tale che per ogni $a \in G$ si ha $a^2 = e$ (e è l'elemento neutro di G). Dimostrare che G è abeliano. Se G è finito che forma può avere (a meno di isomorfismi) ?

7. Sia G un gruppo ed H un sottogruppo di G. Definiamo

$$K = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1} .$$

Dimostrare che $K \lhd G$.

8. Siano G_1 e G_2 due gruppi. Siano H_1 ed H_2 sottogruppi rispettivamente di G_1 e G_2 . Dimostrare che $(H_1 \times H_2) < (G_1 \times G_2)$.

9. Siano G_1 e G_2 due gruppi. Dimostrare che $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.

10. Sia G un gruppo di ordine 6. Dimostrare che G o è ciclico o è isomorfo ad S_3 .

11. Sia $\sigma = (5\ 2\ 9\ 1\ 3)(6\ 4) \in S_9$.

- **a)** Trovare $\theta \in S_9$ tale che $\theta\sigma\theta^{-1} = (1\ 6\ 8\ 7\ 2)(5\ 9)$.
- **b)** Trovare tutti gli elementi di S_9 che commutano con σ (cioè trovare $C(\sigma)$).

12. N.B. Negli esercizi **11, 12, 13** i dati numerici sono poco rilevanti. Potete sostituire 200 (e nel precedente σ ed S_9) con altri interi (altre permutazioni ed altri S_n) per ottenere infinite variazioni del medesimo esercizio.

- **a)** Scrivere (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi abeliani di ordine 200.
- **b)** Per ognuno dei gruppi del punto **a)** e per ogni d divisore di 200 calcolare il numero degli elementi di ordine d.

13. Trovare l'ordine di ogni elemento di $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \times S_3$.

14. Sia $H = \{\, M \in GL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \,:\, \det M = 2 \text{ o } \det M = 4 \text{ o } \det M = 1 \,\}$.

- **a)** Dimostrare che $H \lhd GL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$.
- **b)** Dimostrare che $GL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e calcolare $o(H)$.