Antonio Fuduli

Appunti del corso di

RICERCA OPERATIVA

1. Introduzione alla Ricerca Operativa

19 aprile 2006

Lezione 1

Introduzione alla Ricerca Operativa

Definizione 1.1 (Ricerca Operativa). La Ricerca Operativa è uno strumento scientifico (matematico-informatico) per la risoluzione di *problemi decisionali*.

Definizione 1.2 (Problema Decisionale). Un problema decisionale è un problema in cui uno o più decisori si trovano a dover effettuare delle scelte fra diverse alternative, rispetto a determinati obiettivi.

Storia della Ricerca Operativa

Gran Bretagna: seconda guerra mondiale. Obiettivo della Ricerca Operativa: utilizzare tecniche quantitative con lo scopo di sfruttare al meglio le risorse militari (limitate). Team formato da matematici, fisici, ingegneri.

1941 - Problema: ottimizzare la manutenzione ed organizzazione degli aerei utilizzati per l'avvistamento e l'attacco di sottomarini tedeschi.

Risultati: su un orizzonte temporale di 5 mesi, le tecniche di Ricerca Operativa hanno consentito:

- un incremento delle ore di volo del 61%, mantenendo lo stesso numero di aerei;
- di incrementare la probabilità (inizialmente pari al 3%) di colpire i sottomarini fino al 40% (senza alcuna aggiunta di risorse).

Fine della guerra: le tecniche della Ricerca Operativa vengono trasferite nei contesti civili (industrie, trasporti, amministrazione pubblica, servizi, ecc.)

Problema decisionale

In un problema decisionale, le scelte non sono del tutto arbitrarie. Bisogna infatti tener conto delle risorse limitate (vincoli del problema).

Le possibili scelte vengono valutate in base all'obiettivo o agli obiettivi che i decisori si prefiggono.

I problemi decisionali possono essere classificati in base al numero di obiettivi e/o in base al numero di decisori.

Il dilemma dei prigionieri

È un esempio di problema decisionale a due decisori.

- Due persone vengono arrestate con l'accusa di aver commesso un grave reato;
- Mancanza di prove;
- Obiettivo della polizia: far sì che almeno uno dei due confessi, fornendo le prove di accusa verso l'altro;
- i due prigionieri vengono interrogati separatamente e nessuno dei due sa cosa dirà l'altro.

Regole

- Se solo uno confessa, chi confessa ottiene la libertà, mentre l'altro è condannato a sei anni;
- se entrambi confessano, ciascuno di essi sarà condannato a tre anni;
- se nessuno dei due confessa, entrambi vengono condannati a un anno per reati minori.

Rappresentazione matematica del problema

- Due decisori;
- due possibili scelte: confessare o non confessare

$$\begin{bmatrix} (-3,-3) & (0,-6) \\ (-6,0) & (-1,-1) \end{bmatrix}$$

Il punto (-3,-3) è un punto di equilibrio (o punto di Nash): è cioè un punto in corrispondenza del quale nessuno dei due decisori, sapendo la scelta dell'altro, ha interesse a modificare la propria.

I problemi di ottimizzazione

Nella classe dei problemi decisionali rientrano i cosiddetti **problemi di ottimizzazione**, il cui obiettivo è quello di "massimizzare o minimizzare qualcosa". Esempi di possibili obiettivi sono: minimizzare i costi, massimizzare il profitto, massimizzare il ricavo, minimizzare i tempi, ecc.

Esempi di problemi di ottimizzazione:

- problemi di pianificazione della produzione;
- problemi di trasporto;
- problemi di gestione del portafoglio;
- problemi di percorso ottimo.

Obiettivo del corso di Ricerca Operativa

Affrontare problemi di ottimizzazione a un solo decisore e un solo obiettivo, con l'aiuto di strumenti matematico-informatici (tecniche quantitative).
Tre passi principali:

- Identificazione del problema di ottimizzazione
- Formulazione di un modello matematico che rappresenti il problema
- "Risoluzione" del modello matematico (e quindi del problema).

Identificazione del problema di ottimizzazione

- Individuazione (o scelta) dell'obiettivo;
- individuazione delle risorse disponibili;
- individuazione dei dati a disposizione.

Formulazione di un modello matematico

- Individuazione di un eventuale orizzonte temporale di riferimento;
- definizione delle variabili decisionali (incognite del problema);
- relazioni matematiche fra variabili decisionali e dati **(funzione-obiettivo e vincoli)**.

Risoluzione del modello matematico

- Studio delle proprietà teoriche del modello matematico;
- messa a punto di un algoritmo risolutivo;
- implementazione dell'algoritmo;
- test e risultati.

Esempio: problema di ottimizzazione

- Azienda che produce capi di abbigliamento per uomo: pantaloni, giacche, camicie.

	Costi unitari	Prezzi unitari
Pantaloni	25 euro	45 euro
Giacche	35 euro	70 euro
Camicie	20 euro	$35,50$ euro

- Tre reparti: taglio, cucitura, stiratura

	Taglio	Cucitura	Stiratura
Pantaloni	10 min	15 min	10 min
Giacche	20 min	20 min	20 min
Camicie	15 min	20 min	20 min
Disponibilità giornaliera	20 ore	18 ore	16 ore

- Domanda: quanti capi di abbigliamento conviene produrre giornalmente?

Identificazione del problema di ottimizzazione

- Scelta dell'obiettivo:
  - minimizzare i costi complessivi giornalieri di produzione;
  - massimizzare il ricavo complessivo giornaliero;
  - massimizzare il profitto complessivo giornaliero.
- risorse disponibili:
  - reparto taglio
  - reparto stiratura
  - reparto cucitura
- Dati a disposizione
  - costi unitari di produzione;
  - prezzi unitari di vendita;
  - disponibilità oraria massima giornaliera dei tre reparti di produzione

Formulazione di un modello matematico

- Orizzonte temporale: giorno;
- Variabili decisionali:
  - x_p: numero di pantaloni prodotti giornalmente;
  - x_g: numero di giacche prodotte giornalmente;
  - x_c: numero di camicie prodotte giornalmente.
- relazioni matematiche fra variabili decisionali e dati:
  - vincoli:

$$\begin{array}{c} 10x_p + 20x_g + 15x_c \leq 1200 \\ 15x_p + 20x_g + 20x_c \leq 1080 \\ 10x_p + 15x_g + 20x_c \leq 960 \\ x_p, x_g, x_c \geq 0 \end{array}$$

  - funzione obiettivo:
    - minimizzare i costi complessivi giornalieri di produzione:

$$\min_{x_p,x_g,x_c} 25x_p + 35x_g + 20x_c$$

Modello:

$$\begin{array}{lllll} \min\limits_{x_p,x_g,x_c} & 25x_p & +35x_g & +20x_c & \\ & 10x_p & +20x_g & +15x_c & \leq 1200 \\ & 15x_p & +20x_g & +20x_c & \leq 1080 \\ & 10x_p & +15x_g & +20x_c & \leq 960 \\ & x_p, & x_g, & x_c & \geq 0 \end{array}$$

    - massimizzare il ricavo complessivo giornaliero:

$$\max_{x_p,x_g,x_c} 45x_p + 70x_g + 35,50x_c$$

Modello:

$$\begin{array}{lllll} \max\limits_{x_p,x_g,x_c} & 45x_p & +70x_g & +35,50x_c & \\ & 10x_p & +20x_g & +15x_c & \leq 1200 \\ & 15x_p & +20x_g & +20x_c & \leq 1080 \\ & 10x_p & +15x_g & +20x_c & \leq 960 \\ & x_p, & x_g, & x_c & \geq 0 \end{array}$$

* massimizzare il profitto complessivo giornaliero:

$$\max_{x_p,x_g,x_c} 20x_p + 35x_g + 15,50x_c$$

Modello:

$$\begin{array}{lllll}
\max\limits_{x_p,x_g,x_c} & 20x_p & +35x_g & +15,50x_c & \\
& 10x_p & +20x_g & +15x_c & \leq 1200 \\
& 15x_p & +20x_g & +20x_c & \leq 1080 \\
& 10x_p & +15x_g & +20x_c & \leq 960 \\
& x_p, & x_g, & x_c & \geq 0
\end{array}$$

NOTA: I tre modelli costituiscono degli esempi di problemi di **Programmazione Lineare (PL)**. I valori delle variabili decisionali che risolvono uno dei tre modelli costituiscono una *soluzione ottima* del problema e vengono indicati con x_p^*, x_g^*, x_c^*.

DOMANDA: Come risolvere un problema di PL? Cioè, dato un problema di PL, come determinare, se esiste, una soluzione ottima del problema?