Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

a.a.2024/2025
25/02/2025

Esercizio 1 *Vengono lanciati due dadi regolari a 6 facce.*

1. *Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia 9.*
2. *Calcolare la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia maggiore di 9.*
3. *Calcolare la probabilità che almeno uno dei due dadi mostri un punteggio maggiore di 4.*
4. *Calcolare la probabilità che la somma dei risultati dei due dati sia maggiore di 9 sapendo che almeno un dado mostri un punteggio maggiore di 4.*

Soluzione: Per rispondere alle domande è sufficiente calcolare il rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili. Dalla tabella

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

si ottiene:

1. $\mathbb{P}\{\text{la somma dei valori ottenuti sia } 9\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$;
2. $\mathbb{P}\{\text{la somma dei valori ottenuti sia maggiore di } 9\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$;
3. $\mathbb{P}\{\text{almeno uno dei due dadi mostri un punteggio maggiore di } 4\} = \frac{36-16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$;
4. ponendo
$$A := \{\text{la somma dei valori ottenuti sia maggiore di } 9\}$$
e
$$B := \{\text{almeno uno dei due dadi mostri un punteggio maggiore di } 4\}$$
si ha
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3}{10}\ .$$

■

Esercizio 2 *Sia* (X,Y) *un vettore aleatorio uniformemente distribuito sull'insieme*

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2 - 1, y \geq |x|\right\} \ .$$

1. *Calcolare la costante di normalizzazione della densità di probabilità congiunta.*
2. *Verificare se le componenti del vettore sono indipendenti e in caso contrario calcolare la densità della probabilità condizionata della componente* Y *rispetto alla componente* X.
3. *Calcolare la matrice di covarianza di* (X,Y), *ovvero*

$$\begin{pmatrix} Cov\,(X,X) & Cov\,(X,Y) \\ Cov\,(Y,X) & Cov\,(Y,Y) \end{pmatrix} \ .$$

4. *Calcolare la distribuzione della v.a.* $Z := X \vee Y$.

Soluzione:

1.

$$\begin{aligned} |D| &= \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} dx \int_{-x}^{\sqrt{x+1}} dy + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} dx \int_{x}^{\sqrt{x+1}} dy \\ &= \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} dx \left(\sqrt{x+1} + x\right) + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} dx \left(\sqrt{x+1} - x\right) \\ &= \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} - \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{8} + \\ &\quad + \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right\} - \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{8} \\ &= \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} + \\ &\quad - \left(\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{8} + \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{8}\right) \ . \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{|D|}\left[\left(\sqrt{x+1} + x\right)\mathbf{1}_{\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right]}(x) + \left(\sqrt{x+1} - x\right)\mathbf{1}_{\left[0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]}(x)\right] \ , \\ f_Y(y) &= \frac{1}{|D|}\left[2y\mathbf{1}_{\left[0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]}(y) + \left(y - y^2 + 1\right)\mathbf{1}_{\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]}(y)\right] \ . \end{aligned}$$

Considerando il punto $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ si ottiene che $f_{X,Y}\left(0,\frac{1}{2}\right)\neq f_X(0)\,f_Y\left(\frac{1}{2}\right)$ e pertanto le componenti del vettore aleatorio (X,Y) non sono tra loro indipendenti. Quindi,

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+x}\mathbf{1}_{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\in\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right],\ x\geq y^2-1, y\geq|x|\right\}}+ \\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{x+1}-x}\mathbf{1}_{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\in\left[0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right],\ x\geq y^2-1, y\geq|x|\right\}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \frac{1}{|D|}\left[\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} xdx\int_{-x}^{\sqrt{x+1}} ydy + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} xdx\int_{x}^{\sqrt{x+1}} ydy\right] \\
&= \frac{1}{|D|}\left[\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} dx\left(\frac{x^2+x-x^3}{2}\right)+\int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} dx\left(\frac{x^2+x-x^3}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2|D|}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = ... \\
\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{|D|}\int_{\mathbb{R}} dx f_X(x)\,x = \frac{1}{|D|}\left[\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} dxx\sqrt{x+1}+\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} x^2dx-\int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} x^2dx\right] \\
&= \frac{1}{|D|}\left\{\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}(u-1)\right]_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}-\frac{2}{3}\frac{2}{5}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^3+\left(1+\sqrt{5}\right)^3}{24}\right\} \\
&= ... \\
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \frac{1}{|D|}\int_{\mathbb{R}} dx f_X(x)\,x^2 = \frac{1}{|D|}\left[\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} dxx^2\sqrt{x+1}+\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} x^3dx-\int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} x^3dx\right] \\
&= \frac{1}{|D|}\left\{\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}(u-1)^2\right]_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}-\frac{4}{3}\int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} u^{\frac{3}{2}}(u-1)\,du-\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^4+\left(1+\sqrt{5}\right)^3}{2^6}\right\} \\
&= \frac{1}{|D|}\left\{\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}(u-1)^2\right]_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}-\frac{2^3}{3\cdot 5}\left[u^{\frac{5}{2}}(u-1)\right]_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{2^4}{3\cdot 5\cdot 7}\left[u^{\frac{7}{2}}\right]_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\right. \\
&\quad \left.-\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^4+\left(1+\sqrt{5}\right)^3}{2^6}\right\} = ... \\
\mathbb{E}[Y] &= \int_{\mathbb{R}} dy f_Y(y)\,y = \frac{1}{|D|}\left[\frac{2}{3}\left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]+\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right] = ... \\
\mathbb{E}\left[Y^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} dy f_Y(y)\,y^2 = \frac{1}{|D|}\left[\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^4\right]+\left[\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}+\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right] = ...
\end{aligned}$$

Dunque $Cov(X,Y)=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y], Cov(X,X)=Var[X]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}^2[X]$ e $Cov(Y,Y)=Var[Y]=\mathbb{E}\left[Y^2\right]-\mathbb{E}^2[Y]$.

4.

$$\mathbb{P}\{Z\le z\}=\mathbb{P}\{X\le z,Y\le z\}=\frac{1}{|D|}\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:z\ge x\ge y^2-1\ ,\ z\ge y\ge |x|\}}dxdy$$

$$=\mathbf{1}_{\left(\frac{1+\sqrt5}{2},+\infty\right]}(z)+\frac{1}{|D|}z^2\mathbf{1}_{\left[0,\frac{-1+\sqrt5}{2}\right]}(z)+\mathbf{1}_{\left[\frac{-1+\sqrt5}{2},\frac{1+\sqrt5}{2}\right]}(z)\frac{1}{|D|}\left[\int_{\frac{1-\sqrt5}{2}}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{x+1}\wedge z}dy+\frac{z^2}{2}\right],$$

ma siccome

$$\int_{\frac{1-\sqrt5}{2}}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{x+1}\wedge z}dy+\frac{z^2}{2}=\int_{\frac{1-\sqrt5}{2}}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{x+1}}dy-\int_{z^2-1}^{0}dx\int_{z}^{\sqrt{x+1}}dy+\frac{z^2}{2}$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^{\frac32}\right)-\frac{\left(1-\sqrt5\right)^2}{8}-\left(\frac13z^3-z+\frac23\right)+\frac{z^2}{2},$$

$$\mathbb{P}\{Z\le z\}=\mathbf{1}_{\left(\frac{1+\sqrt5}{2},+\infty\right]}(z)+\frac{1}{|D|}z^2\mathbf{1}_{\left[0,\frac{-1+\sqrt5}{2}\right]}(z)+\mathbf{1}_{\left[\frac{-1+\sqrt5}{2},\frac{1+\sqrt5}{2}\right]}(z)\frac{1}{|D|}\times$$

$$\times\left[-\frac13z^3+\frac{z^2}{2}-z-\frac23\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^{\frac32}-\frac{\left(1-\sqrt5\right)^2}{8}\right].$$

■

Esercizio 3 *Supponiamo di avere una successione di vv.aa. $\{X_n\}_{n\ge0}$ sullo spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ che descrive una catena di Markov con 4 stati, $S=\{1,2,3,4\}$ tale che: dallo stato 1 si transisce con probabilità $\frac14$ allo stato 1 nonché con probabilità $\frac34$ allo stato 2. Dallo stato 2, si transisce con probabilità $\frac23$ allo stato 3 e con probabilità $\frac13$ allo stato 4. Dallo stato 3 si transisce con probabilità $\frac13$ allo stato 1 e con probabilità $\frac23$ allo stato 3. Dallo stato 4 si transisce con probabilità $\frac14$ allo stato 2 e con probabilità $\frac34$ allo stato 4.*

1. *Scrivere la matrice di probabilità di transizione tra gli stati della catena, elencarne le classi di equivalenza e calcolarne il periodo.*
2. *Calcolare, se esistono, $\lim_{n\to\infty}P_{1,3}^{(2n)},\lim_{n\to\infty}P_{3,4}^{(n)},\lim_{n\to\infty}P_{2,4}^{(2n)}$ e $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\omega\in\Omega:X_n(\omega)=1\}$.*

Soluzione:

1. $$P=\begin{pmatrix}\frac14&\frac34&0&0\\0&0&\frac23&\frac13\\\frac13&0&\frac23&0\\0&\frac14&0&\frac34\end{pmatrix}$$

   Esiste un unica classe d'equivalenza aperiodica.

2. Per quanto esposto al punto precedente vale il Teorema Ergodico, perciò $\lim_{n\to\infty}P_{1,3}^{(2n)}=\pi_3,\lim_{n\to\infty}P_{3,4}^{(n)}=\pi_4,\lim_{n\to\infty}P_{2,4}^{(2n)}=\pi_4$ e $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{\omega\in\Omega:X_n(\omega)=1\}=\pi_1$ dove $(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$

risolve

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_4 = \pi_2 \\ \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 = \pi_3 \\ \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_4 = \pi_4 \end{cases} ,$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

ovvero, $\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_4, \pi_2 = \frac{3}{4}\pi_4, \pi_3 = \frac{3}{2}\pi_4, \pi_4 = \frac{12}{47}$.

■

Esercizio 4 *Sia* $\{E_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di eventi stocasticamenti indipendenti subordinatamente alla conoscenza di un parametro* Θ*, che si assume essere una v.a. la cui distribuzione di probabilità a priori è descritta dalla funzione di ripartizione (distribuzione)*

$$F_{\Theta}(\theta) := C \int_{-\infty}^{\theta} dyy\sqrt{1-y}\mathbf{1}_{[0,1]}(y) \ ,$$

tale che $\mathbb{P}(E_i|\Theta) = \Theta$*. Dopo le prime quattro osservazioni si registra che il primo ed il quarto evento sono accaduti, mentre il secondo ed il terzo evento non sono stati osservati.*

1. *Calcolare la densità di probabilità a posteriori di* Θ *e il suo punto di massimo.*
2. *Calcolare la covarianza a posteriori degli eventi* E_6 *e* E_7*.*
3. *Calcolare densità di probabilità a posteriori della v.a.* $Z = \Theta^{-1}$*.*

Soluzione:

1. Consideriamo le vv.aa. $\xi_i := \mathbf{1}_{E_i}, i = 1,..,4$. La densità a posteriori di Θ dato il vettore aleatorio $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ sarà

$$\begin{gathered} \pi_4(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4) = \\ \pi_4(\Theta = \theta | \{\omega \in \Omega : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (1,0,0,1)\}) = \\ K\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (1,0,0,1)\} | \Theta = \theta) \pi_0(\theta) \\ = K\mathbb{P}(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4 | \Theta = \theta) \pi_0(\theta) \\ = K\mathbb{P}(E_1|\Theta = \theta)\mathbb{P}(E_2^c|\Theta = \theta) \times \\ \times \mathbb{P}(E_3^c|\Theta = \theta)\mathbb{P}(E_4|\Theta = \theta)\pi_0(\theta) = \\ K\mathbb{P}(E_1|\Theta = \theta)(1 - \mathbb{P}(E_2|\Theta = \theta))(1 - \mathbb{P}(E_3|\Theta = \theta)) \times \\ \times \mathbb{P}(E_4|\Theta = \theta)\pi_0(\theta) = K\theta^2(1-\theta)^2\pi_0(\theta) \\ = \frac{13 \cdot 11 \cdot 7}{5 \cdot 8}\theta^3(1-\theta)^{\frac{5}{2}} \end{gathered}$$

dove:

(a) nel terzultimo passaggio si è usato che gli eventi $E_i, i \geq 1$, sono stocasticamenti indipendenti subordinatamente alla conoscenza di Θ;

(b)

$$\pi_0(\theta) := \frac{d}{d\theta} F_\Theta(\theta) = C\theta(1-\theta)^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta)$$

con C tale che

$$\begin{aligned} 1 &= CF_\Theta(1) = C\int_0^1 dyy(1-y)^{\frac{1}{2}} \\ &= C\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = C\frac{4}{15} \Longrightarrow C = \frac{15}{4} \ ; \end{aligned}$$

(c) K è tale che

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} d\theta \pi_4\left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\theta K\theta^2(1-\theta)^2 \pi_0(\theta) \\ &= \frac{15}{4}K\int_0^1 d\theta\theta^3(1-\theta)^{\frac{5}{2}} \\ &= K\frac{15}{4}\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)} \Longrightarrow K = \frac{13\cdot 11\cdot 7}{5\cdot 8} \ . \end{aligned}$$

Il valore per cui la funzione $[0,1] \ni \theta \to \theta^3(1-\theta)^{\frac{5}{2}} \in [0,1]$ ammette un punto di massimo è $\theta_0 = \frac{6}{11}$.

2. La covarianza a posteriori degli eventi E_6 e E_7 è

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(E_6 \cap E_7 | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) - \mathbb{P}\left(E_6 | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) \times \\
&\times \mathbb{P}\left(E_7 | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) \\
&= \int_0^1 d\theta \mathbb{P}\left(E_6 \cap E_7 | \Theta = \theta\right) \pi_4\left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) + \\
&- \int_0^1 d\theta \mathbb{P}\left(E_6 | \Theta = \theta\right) \pi_4\left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) \times \\
&\times \int_0^1 d\theta \mathbb{P}\left(E_7 | \Theta = \theta\right) \pi_4\left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) \\
&= \int_0^1 d\theta \mathbb{P}\left(E_6 | \Theta = \theta\right) \mathbb{P}\left(E_7 | \Theta = \theta\right) \pi_4\left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) + \\
&- \int_0^1 d\theta \mathbb{P}\left(E_6 | \Theta = \theta\right) \pi_4\left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) \times \\
&\times \int_0^1 d\theta \mathbb{P}\left(E_7 | \Theta = \theta\right) \pi_4\left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) \\
&= k \int_0^1 d\theta \theta^5 \left(1-\theta\right)^{\frac{5}{2}} - k^2 \left(\int_0^1 d\theta \theta^4 \left(1-\theta\right)^{\frac{5}{2}}\right)^2 \\
&= k \left[\frac{\Gamma\left(6\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{19}{2}\right)} - k \left(\frac{\Gamma\left(5\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{2}\right)}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

dove $k = \frac{15}{4}K = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{32}$.

3. La funzione di ripartizione a posteriori di Z è

$$\begin{gathered}
\mathbb{P}\left(\{Z \leq z\} | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) = \\
\mathbb{P}\left(\left\{\Theta^{-1} \leq z\right\} | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) = \\
\mathbb{P}\left(\left\{\Theta \geq \frac{1}{z}\right\} | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) = \\
1 - \mathbb{P}\left(\left\{\Theta \leq \frac{1}{z}\right\} | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) = \\
1 - \int_0^{\frac{1}{z}} d\theta \pi_4\left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) = \\
1 - k \int_0^{\frac{1}{z}} d\theta \theta^3 \left(1-\theta\right)^{\frac{5}{2}} \ .
\end{gathered}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
f_Z\left(z\right) &= \frac{d}{dz} \mathbb{P}\left(\{Z \leq z\} | E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4\right) \\
&= k \left(\frac{1}{z}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{5}{2}} = k \frac{\left(z-1\right)^{\frac{5}{2}}}{z^{\frac{15}{2}}} \ .
\end{aligned}$$