Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

a.a.2023/2024
14/11/2024

Esercizio 1 *Il menù di un osteria offre 3 primi, 3 secondi e 2 contorni. Supponendo che ogni avventore, indipendentemente dagli altri, scelga un primo un secondo e un contorno a caso:*

1. *calcolare la probabilità che 2 clienti scelgano gli stessi piatti;*
2. *calcolare la probabilità che su 5 clienti almeno 2 abbiano fatto la stessa ordinazione;*

Da una statistica risulta che il 70% dei clienti che ha scelto un secondo di carne ordina un bicchiere di vino rosso, mentre la stessa percentuale di clienti che ha scelto un secondo di pesce ordina un calice di vino bianco. Sapendo che il menù riporta 2 secondi di carne e uno di pesce, calcolare la probabilità che chi beve vino rosso abbia scelto un secondo di carne.

Soluzione:

1. Le combinazioni di ordinazioni composte da primo, secondo e contorno sono pari a $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. Perciò considerandole equiprobabili si ottiene che la probabilità di ciascuna ordinazione è pari a $\frac{1}{18}$. Se X_i indica l'ordinazione dell'i-simo cliente, la probabilità che due clienti abbiano fatto la stessa ordinazione è pari a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 = X_2\} &= \sum_{i=1}^{18} \mathbb{P}\{X_1 = X_2 = i\} = \\
&= \sum_{i=1}^{18} \mathbb{P}\{X_1 = i\} \mathbb{P}\{X_2 = i\} = \sum_{i=1}^{18} \mathbb{P}^2\{X_1 = i\} \\
&= \frac{18}{(18)^2} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

2. Sia A l'evento che almeno 2 clienti su 5 abbiano fatto la stessa ordinazione, A^c è l'evento che tutti i 5 clienti abbiano fatto ordinazioni diverse, perciò $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ dove

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\{\text{casi possibili}\}|} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{(18)^5} .$$

infatti il numero di casi possibili è equivalente al numero di modi in cui si può estrarre da un urna contenente 18 palline numerate un campione ordinato di 5 palline con reibussolamento, mentre il numero di casi favorevoli è pari al numero di modi in cui si può estrarre da un urna contenente 18 palline numerate un campione ordinato di 5 palline senza reibussolamento.

Per ogni $i = 1, 2, 3$ consideriamo un urna contenete un numero totale N_i di palline bianche e nere pari al numero di componenti difettosi di gravità i di cui il numero di palline bianche H_i è pari al numero di componenti difettosi di gravità i che si rompono.

Sia R l'evento che un cliente abbia ordinato del vino rosso, C l'evento che un cliente abbia ordinato per secondo della carne e P l'evento che abbia ordinato per secondo del pesce. La probabilità che un cliente che beve del vino rosso abbia ordinato un secondo di carne è

$$\mathbb{P}(C|R) = \mathbb{P}(R|C)\frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(R|P)\mathbb{P}(P)} .$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\{\text{casi possibili}\}|} = \frac{2}{3} \; ; \; \mathbb{P}(P) = \frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\{\text{casi possibili}\}|} = \frac{1}{3} , \\
\mathbb{P}(C|R) &= \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{14}{17} \simeq 82,35\% .
\end{aligned}$$

■

Esercizio 2 *Sia* (X, Y) *un vettore aleatorio uniformemente distribuito sull'insieme*

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \vee |y| \leq 1, x \geq 2y^2 - 1\right\} .$$

1. *Calcolare la costante di normalizzazione della densità di probabilità congiunta.*
2. *Verificare se le componenti del vettore sono indipendenti e in caso contrario calcolare la densità della probabilità condizionata della componente* Y *rispetto alla componente* X.
3. *Calcolare la matrice di covarianza di* (X, Y), *ovvero*

$$\begin{pmatrix} Cov(X, X) & Cov(X, Y) \\ Cov(Y, X) & Cov(Y, Y) \end{pmatrix} .$$

Soluzione:

1. L'area di D è pari a $2c$ dove

$$c = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{\frac{x+1}{2}}} dy = \int_{-1}^{1} dx \sqrt{\frac{x+1}{2}} = 2\int_{0}^{1} dy \sqrt{y} = \frac{4}{3}$$

   Perciò la costante di normalizzazione della distribuzione di probabilità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è pari a $K := \frac{3}{8}$.

2. Le densità di probabilità marginali di (X, Y) sono

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\frac{3}{8}\int_{-\sqrt{\frac{x+1}{2}}}^{\sqrt{\frac{x+1}{2}}} dy \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)
\end{aligned}$$

e

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(y)\,\frac{3}{8}\int_{2y^2-1}^{1} dx = \frac{3}{4}\left(1-y^2\right)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)\ .$$

Da cui segie che le vv.aa. X e Y non sono tra loro stocasticamente indipendenti. Infatti, scegliendo per esempio il punto $(0,0)$ si ottiene

$$f_X(0)\,f_Y(0) = \frac{9}{16\sqrt{2}} \neq f_{(X,Y)}(0,0) = \frac{3}{8}\ .$$

Allora,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\mathbf{1}_{\left\{(u,v)\in[-1,1]^2:|x|\leq 1,|y|\leq\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right\}}(x,y)}{\sqrt{\frac{x+1}{2}}}\ .$$

3.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} dx f_X(x)\,x = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} dx x\sqrt{\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{5}\ .$$

Poiché f_Y è una funzione pari $y \mapsto y f_Y(y)$ è dispari e siccome l'intervallo d'integrazione è simmetrico

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} dy f_Y(y)\,y = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} dy y\left(1-y^2\right) = 0\ .$$

Inoltre, allo stesso modo

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{3}{8}\int_D dxdyxy = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1} dx x\int_{-\sqrt{\frac{x+1}{2}}}^{\sqrt{\frac{x+1}{2}}} dy y = 0\ ,$$

quindi

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0\ ,$$

ovvero X e Y sono vv.aa. scorrelate sebbene non indipendenti. Non resta allora che calcolare $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ e $\mathbb{E}\left[Y^2\right]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} dx x^2\sqrt{\frac{x+1}{2}} = \frac{33}{105} = \frac{11}{5\cdot 7}\\ \mathbb{E}\left[Y^2\right] &= \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} dy y^2\left(1-y^2\right) = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} Cov(X,X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Cov(Y,Y)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}^2[X] & 0 \\ 0 & \mathbb{E}\left[Y^2\right]\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cdot\frac{48}{35} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

■

Esercizio 3 *Supponiamo di avere una successione di vv.aa.* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *sullo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *che descrive una catena di Markov con 4 stati,* $S = \{1, 2, 3, 4\}$ *tale che: dallo stato 1 si transisce con probabilità* $\frac{1}{3}$ *allo stato 2 e con probabilità* $\frac{2}{3}$ *allo stato 3. Dallo stato 2, si transisce con probabilità* $\frac{1}{6}$ *allo stato 1 e allo stato 4 e si resta nello stesso stato con probabilità* $\frac{2}{3}$*. Dallo stato 3 si transisce con probabilità* $\frac{1}{6}$ *allo stato 1 e allo stato 4 e si resta nello stesso stato con probabilità* $\frac{2}{3}$*. Dallo stato 4 si transisce con probabilità* $\frac{1}{3}$ *allo stato 2 e con probabilità* $\frac{2}{3}$ *allo stato 3.*

1. *Elencare le classi di equivalenza degli stati e calcolarne il periodo.*
2. *Calcolare* $\mathbb{P}(\{X_3 = 2\} \mid \{X_1 = 3\})$ *e, assumendo come distribuzione iniziale quella uniforme, calcolare* $\mathbb{E}[X_2]$.
3. *Se* $\{P_{i,j}\}_{i,j=1,..,4}$ *indica la matrice delle probabilità di transizione tra gli stati della catena, calcolare se esistono:* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_{2n+1}(\omega) = 4\}$, $\lim_{n\to\infty} \left(P^n_{3,2} + P^n_{3,4}\right)$, $\lim_{n\to\infty} P^{2n}_{1,3}$.

Soluzione:

1. La matrice delle probabilità di transizione tra gli stati della catena è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

perciò la catena può essere rappresentata mediante il grafo diretto

$$\begin{array}{cccc} & 1 & \leftrightarrow & 2 & \circlearrowleft \\ & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & \\ \circlearrowleft & 3 & \leftrightarrow & 4 & \end{array}$$

da cui si deduce che esiste un unica classe di stati comunicanti aperiodica.

2. Poiché la catena di Markov è omogenea

$$\mathbb{P}(\{X_3 = 2\} \mid \{X_1 = 3\}) = \mathbb{P}(\{X_2 = 2\} \mid \{X_0 = 3\}) = P^2_{3,2}\ .$$

Ma

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{18} & \frac{4}{18} & \frac{8}{18} & \frac{3}{18} \\ \frac{2}{18} & \frac{10}{18} & \frac{4}{18} & \frac{2}{18} \\ \frac{2}{18} & \frac{2}{18} & \frac{12}{18} & \frac{2}{18} \\ \frac{3}{18} & \frac{4}{18} & \frac{8}{18} & \frac{3}{18} \end{pmatrix}\ ,$$

Quindi, $P^2_{3,2} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

$$\mathbb{E}[X_2] = \sum_{i,j=1}^{4} j\mathbb{P}(\{X_2 = j\} \mid \{X_0 = i\})\,\mathbb{P}\{X_0 = i\} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{4} \frac{1}{4} P^2_{i,j} j = \frac{31}{12}\ .$$

3. Poiché la catena di Markov descritta dalla matrice delle probabilità di transizione P è indecomponibile e aperiodica vale il teorema ergodico. Perciò,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{2n} &= \pi_3, \; \lim_{n\to\infty} P_{3,2}^{n} = \pi_2, \\ \lim_{n\to\infty} P_{3,4}^{n} &= \pi_4 = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = i\right\} P_{i,4}^{n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 4\right\}, \end{aligned}$$

e pertanto $\lim_{n\to\infty}\left(P_{1,3}^{n} + P_{3,4}^{n}\right) = \pi_3 + \pi_4$, dove $\pi := (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ è la distribuzione di probabilità invariante per P, ovvero $\pi P = \pi$, che si ottiene risolvendo

$$\begin{cases} \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_4 = \pi_2 \\ \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 + \frac{2}{3}\pi_4 = \pi_3 \\ \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 = \pi_4 \end{cases} , \qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \ .$$

Perciò si ha $\pi_1 = \pi_4 = \frac{1}{8}; \pi_2 = \frac{1}{4}; \pi_3 = \frac{1}{2}$.

■

Esercizio 4 *Sia* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di vv.aa. stocasticamenti indipendenti, subordinatamente alla conoscenza di un parametro* Θ, *con densità di probabilità condizionata marginale*

$$f(x_i|\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta}{2}x_i^2\right\} \ , \ x_i \in \mathbb{R} \ .$$

Supponendo che la densità a priori di Θ *sia un esponenziale di parametro* 2, *se si osservano i primi valori* $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = \frac{1}{2}$, *della successione,*

1. *calcolare la densità di probabilità a posteriori di* Θ *e il suo punto di massimo;*
2. *calcolare la probabilità a posteriori dell'evento* $\{\Theta \leq 3\}$;
3. *calcolare valore atteso e varianza a posteriori della v.a.* $Z = \Theta^{\frac{3}{2}}$.

Soluzione:

1. La densità a posteriori di Θ sarà pari a

$$\begin{aligned} &\pi\left(\Theta = \theta |\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(1, 2, 1, \frac{1}{2}\right)\right) = \\ &= K f_{\Theta}\left(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = \frac{1}{2}\right)\pi_{\Theta}(\theta) \\ &= K f(x_1 = 1|\theta) f(x_2 = 2|\theta) f(x_3 = 1|\theta) f\left(x_4 = \frac{1}{2}|\theta\right) e^{-2\theta}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\theta) \\ &= \frac{K}{(2\pi)^2}\theta^2 e^{-\theta\left[\frac{\left(1+4+1+\frac{1}{4}\right)}{2}+2\right]} = \frac{K}{(2\pi)^2}\theta^2 e^{-\theta\left[\frac{41}{8}\right]} \ , \end{aligned}$$

e quindi è una $\Gamma\left(3, \frac{41}{8}\right)$. Perciò $K = (2\pi)^2 \left(\frac{41}{8}\right)^3 \frac{1}{2} = \pi^2 \frac{(41)^3}{2^5}$.

Il punto di massimo si ha per $\theta = \frac{16}{41}$.

2. Ponendo $\lambda = \frac{41}{8}$, integrando due volte per parti, la probabilità a posteriori dell'evento $\{\Theta \leq 3\}$ risulta allora pari a

$$\frac{\lambda^3}{2} \int_0^3 d\theta \theta^2 e^{-\theta\lambda} = 1 - \left(\frac{9}{2}\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) e^{-3\lambda} \; .$$

3. Il valore atteso a posteriori di $\Theta^{\frac{3}{2}}$ è pari a

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^3}{2} \int_0^{+\infty} d\theta \theta^{\frac{7}{2}} e^{-\theta\lambda} &= \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{2\lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2^{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt{\pi}}{2^4 \, (41)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2\pi}}{(41)^{\frac{3}{2}}} \; ; \end{aligned}$$

il valore atteso a posteriori di Θ^3 è pari a

$$\frac{\lambda^3}{2} \int_0^{+\infty} d\theta \theta^5 e^{-\theta\lambda} = \frac{5!}{2\lambda^3} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2^{2+\frac{9}{2}}}{(41)^{\frac{3}{2}}} \; .$$

Perciò la varianza a posteriori di Θ è uguale a $\frac{5 \cdot 3 \cdot 2^{\frac{13}{2}}}{(41)^{\frac{3}{2}}} - \frac{7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2\pi}{(41)^3}$.

■