# Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

a.a.2023/2024
31/02/2024

**Esercizio 1** *Una cittadina di mille abitanti viene sottoposta ad un indagine epidemiologica per la prevenzione di una malattia che colpisce l'un percento della popolazione. L'azienda sanitaria locale selezione un campione di cento persone, scegliendole in modo tale che tutti gli abitanti abbiano le stesse chances di essere selezionati. Sia, $X$ il numero di individui malati apparteneti al campione selezionato.*

1. *Calcolare la distibuzione di probabilità di $X$.*
2. *Calcolare la distibuzione di probabilità di $X$ sapendo che il 60% della popolazione della cittadina è di sesso femminile e che, della percentuale di persone colpite dalla malattia, l'80% è di sesso maschile, scegliendo, come sopra, un campione di individui per metà maschi.*

**Soluzione:**

1. La probabilità dell'evento indicato è pari al rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quelli possibili.

   Il numero di casi favorevoli è dato dal numero di campioni di 100 persone che è possibile estrarre da un insieme di 1000 persone. Poiché non c'è preferenza nella scelta delle persone, questo è dato nal numero di modi in cui si può estrarre un campione non ordinato di 100 numeri il cui valore varia tra 1 e 1000, ovvero

   $$|\{\text{casi possibili}\}| = \binom{1000}{100} .$$

   Se la malattia colpisce l'un percento della popolazione il numero di malati $M$ su 1000 persone sarà pari a $1000 \times \frac{1}{100} = 10$. Perciò, indicando con $I(X)$ l'insieme dei valori possibili di $X$, si ha $I(X) = \{0, .., 10\}$. Quindi, posto $X = i$, il numero di casi favorevoli è dato dal numero di modi in cui si può estrarre da un insieme di $M$ numeri un campione non ordinato di $i$ numeri, moltiplicato per il numero di modi in cui si può estrarre da un insieme di $1000 - M$ numeri un campione non ordinato di $100 - i$ numeri, ovvero

   $$|\{\text{casi favorevoli}\}| = \binom{10}{i} \binom{1000-10}{100-i} = \binom{10}{i} \binom{990}{100-i} .$$

Pertanto, $X$ ha la distribuzione ipergeometrica e $\forall i \in I(X)$

$$\mathbb{P}\{X=i\} = \frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\{\text{casi possibili}\}|} = \frac{\binom{10}{i}\binom{990}{100-i}}{\binom{1000}{100}} \ .$$

2. Il numero di cittadini di sesso femminile è pari a $1000 \times \frac{60}{100} = 600$ e quello di cittadini di sesso femminile malati è pari a $M \times \frac{20}{100} = 10 \times \frac{2}{10} = 2$. Perciò, ragionando come sopra, indicando con $Y$ il numero di persone di sesso femminile malate si ha

$$\mathbb{P}\{Y=i\} = \frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\{\text{casi possibili}\}|} = \frac{\binom{2}{i}\binom{598}{50-i}}{\binom{600}{50}} \ , \ i \in \{0,1,2\} =: I(Y) \ .$$

Analogamente, Il numero di cittadini di sesso maschile è pari a 400 di cui 8 malati. Dunque, indicando con $Z$ il numero di persone di sesso maschile malate,

$$\mathbb{P}\{Z=i\} = \frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\{\text{casi possibili}\}|} = \frac{\binom{8}{i}\binom{392}{50-i}}{\binom{400}{50}} \ , \ i \in \{0,..,8\} =: I(Z) \ .$$

Allora, siccome $X = Y + Z$, in questo caso, poiché $Y$ e $Z$ sono indipendenti, usando la formula delle probabilità totali,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X=i\} &= \mathbb{P}\{Y+Z=i\} = \sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}(\{Y+Z=i\} \,|\, \{Y=j\})\, \mathbb{P}\{Y=j\} \\
&= \sum_{j=0}^{2\wedge i} \mathbb{P}\{Z=i-j\}\, \mathbb{P}\{Y=j\} = \\
&= \sum_{j=0}^{2\wedge i} \frac{\binom{8}{i-j}\binom{392}{50-i+j}}{\binom{600}{50}} \frac{\binom{2}{i}\binom{598}{50-i}}{\binom{400}{50}} \ .
\end{aligned}$$

■

**Esercizio 2** *Siano $X$ e $Y$ due vv.aa. indipendenti identicamente distribuite di densità di probabilità*

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x) := Cx^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \in \mathbb{R}_+ \ .$$

*Calcolare:*

1. *$C$ e la funzione di ripartizione congiunta delle componenti del vettore aleatorio $(X,Y)$;*

*2. la densità di probabilità di* $Z := \sqrt{X+Y}$;

*3. La matrice di covarianza del vettore aleatorio* $(X,Y,Z)$, *ovvero*

$$\begin{pmatrix} Cov\,(X,X) & Cov\,(X,Y) & Cov\,(X,Z) \\ Cov\,(Y,X) & Cov\,(Y,Y) & Cov\,(Y,Z) \\ Cov\,(Z,X) & Cov\,(Z,Y) & Cov\,(Z,Z) \end{pmatrix} .$$

**Soluzione:**

1.
$$1 = C\int_0^1 dx x^2 = \frac{C}{3} \Longrightarrow C = 3 \ .$$

Poiché $X$ e $Y$ sono vv.aa. indipendenti $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$ e poiché $X \overset{d}{=} Y$, $F_Y(y) = F_X(y)$; perciò, siccome

$$\begin{aligned} F_X(x) &= x^3\mathbf{1}_{(0,1]}(x) + \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(x) \ , \\ F_{(X,Y)}(x,y) &= \left(x^3\mathbf{1}_{(0,1]}(x) + \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(x)\right)\left(y^3\mathbf{1}_{(0,1]}(y) + \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(y)\right) \end{aligned}$$

2. Sia $W := X+Y$,

$$F_W(w) = \mathbf{1}_{[0,2)}(w)\,9\int\int_{\left\{(x,y)\in[0,1]^2\ :\ x+y\leq w\right\}} dxdyx^2y^2 + \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(w) \ .$$

Ponendo

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = u-v \\ y = v \end{cases} ,$$

poiché lo jacobiano del cambio di variabile è pari a 1,

$$F_W(w) = \mathbf{1}_{[0,2)}(w)\,9\int_0^1 dvv^2\int_0^w du\,(u-v)^2 + \mathbf{1}_{[2,+\infty)}(w) \ ,$$

perciò

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{d}{dw}F_W(w) = \mathbf{1}_{[0,2]}(w)\,9\int_0^1 dvv^2\,(w-v)^2 \\ &= \left(3w^2 - \frac{9}{2}w + \frac{9}{5}\right)\mathbf{1}_{[0,2]}(w) \\ &= 9\left(\frac{w^2}{3} - \frac{w}{2} + \frac{1}{5}\right)\mathbf{1}_{[0,2]}(w) \ . \end{aligned}$$

Allora,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}\left\{\sqrt{W} \leq z\right\} = \mathbb{P}\left\{W \leq z^2\right\} \\ &= \mathbf{1}_{[0,\sqrt{2})}(z)\int_0^{z^2} dwf_W(w) + \mathbf{1}_{[\sqrt{2},+\infty)}(z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{d}{dz}F_Z(z) = 2zf_W\left(z^2\right)\mathbf{1}_{[0,\sqrt{2})}(z) \\ &= 18z\left(\frac{z^4}{3}-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{5}\right)\mathbf{1}_{[0,\sqrt{2})}(z) \end{aligned}$$

3. Poiché, $X$ è stocasticamente indipendente da $Y, Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = 0$. Inoltre, poiché $X \overset{d}{=} Y, Cov(X,X) = Var(X) = Var(Y) = Cov(Y,Y)$ e $Cov(X,Z) = Cov(Z,X) = Cov(Z,Y) = Cov(Y,Z)$. Pertanto resta da calcolare $Var(X), Cov(X,Z)$ e $Var(Z)$. Siccome

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 3\int_0^1 dx x^3 = \frac{3}{4}\ ,\ \mathbb{E}\left[X^2\right] = 3\int_0^1 dx x^4 = \frac{3}{5}\ , \\ \mathbb{E}[Z] &= 18\int_0^{\sqrt{2}} dz z^2\left(\frac{z^4}{3}-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{5}\right) = 36\sqrt{2}\left(\frac{4}{3\cdot 7}-\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5}\right) \\ &= \frac{3^2\cdot 2^2}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}(40-42+14)\sqrt{2} = \frac{3^2\cdot 2}{5\cdot 7}\sqrt{2}\ , \\ \mathbb{E}[ZX] &= \mathbb{E}\left[X\sqrt{X+Y}\right] = 9\int_0^1\int_0^1 dx dy x^3 y^2\sqrt{x+y} \\ &= 9\int_0^2 du\sqrt{u}\int_0^1 dv v^2(u-v)^3 \\ &= 9\int_0^2 du\sqrt{u}\int_0^1 dv v^2\left(u^3-3u^2v+3uv^2-v^3\right) \\ &= 9\int_0^2 du\sqrt{u}\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{5}u-\frac{1}{6}\right) \\ &= 3^2\sqrt{2}\left(\frac{2^5}{3^3}-\frac{3}{4}\frac{2^4}{7}+\frac{3}{5}\frac{2^3}{5}-\frac{1}{6}\frac{2^2}{3}\right) \\ &= 3^2\sqrt{2}\left(\frac{2^5}{3^3}-3\frac{2^2}{7}+\frac{3\cdot 2^3}{5^2}-\frac{2}{3^2}\right) \end{aligned}$$

e $\mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y] = 2\mathbb{E}[X]$, si ha

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right]-(\mathbb{E}[X])^2 = \frac{3}{5}-\frac{9}{16} = \frac{3}{5\cdot 2^4}\ ,$$

$$Var(Z) = \frac{2\cdot 3}{5}-\frac{2^3\cdot 3^2}{5^2\cdot 7^2}\ ,$$

$$Cov(X,Z) = \mathbb{E}[XZ]-\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Z] =$$

$$= 3^2\sqrt{2}\left(\frac{2^5}{3^3}-3\frac{2^2}{7}+\frac{3\cdot 2^3}{5^2}-\frac{2}{3^2}\right)-\frac{3^3}{2\cdot 5\cdot 7}\sqrt{2}\ .$$

■

**Esercizio 3** *Supponiamo di avere una moneta simmetrica, un mazzo di $N$ carte composto da due mazzi distinti e di procedere con il gioco seguente. Si pesca una carta dal mazzo; si lancia la moneta* *e si attribuisce la carta estratta al primo mazzo se l'esito del lancio è testa e al secondo mazzo altrimenti. Sia $X_n$ la v.a. che conta in numero di carte presenti nel primo mazzo all'ennesimo turno di gioco.*

1. *Dimostrare che la successione di vv.aa. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ descrive una catena di Markov.*
2. *Elencare le classi di equivalenza degli stati e calcolarne il periodo.*
3. *Dimostrare se esiste o meno la distribuzione invariante e, in caso affermativo, scrivere il sistema di equazioni che la determinano e calcolarla nel caso $N = 3$.*
   (a) *Ponendo $m := \sum_{i=0}^{N} \pi_i i$, dove $(\pi_0, .., \pi_N)$ è la distribuzione di probabilità invariante, dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_n - m \right| > \varepsilon \right\} = 0 \ .$$

**Soluzione:**

1. Osserviamo che

$$\mathbb{P}\left(\{X_{n+1} = k\} \,|X_n\right) = \frac{N - X_n}{N} \frac{1}{2} \delta_{k,X_n+1} + \frac{1}{2} \delta_{k,X_n} + \frac{X_n}{N} \frac{1}{2} \delta_{k,X_n-1} \ ,$$

   quindi $\{X_n\}_{n\geq 0}$ descrive una catena di Markov omogenea il cui spazio degli stati è $S = \{0, 1, .., N\}$ e la cui matrice di probabilità di transizione è $(P_{i,j})_{i,j=0,..,N}$ dove

$$\begin{aligned} P_{i,j} \quad : \quad &= \mathbb{P}\left(\{X_1 = j\} \,|\, \{X_n = i\}\right) \\ = \quad &\left(1 - \frac{i}{N}\right) \frac{1}{2} \delta_{j,i+1} + \frac{1}{2} \delta_{j,i} + \frac{i}{N} \frac{1}{2} \delta_{j,i-1} \ . \end{aligned}$$

2. Poiché $\forall i, j \in S, P_{i,j} > 0$ esiste un una classe indecomponibile di stati equivalenti aperiodica.
3. In virtù di quanto affermato al punto precedente vale il teorema ergodico per le catene di Markov omogenee a stati finiti, perciò esiste un unica distribuzione di probabilità invariante $(\pi_0, .., \pi_N)$ che è soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N} \pi_i P_{i,j} \quad &= \quad \left(1 - \frac{j-1}{N}\right) \frac{1}{2} \pi_{j-1} + \frac{1}{2} \pi_j + \frac{j+1}{N} \frac{1}{2} \pi_{j+1} = \pi_j \ , \ j = 0, .., N \ , \\ \sum_{i=0}^{N} \pi_i \quad &= \quad 1 \ . \end{aligned}$$

   Nel caso $N = 3$,

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{cases} \frac{\pi_0}{2}+\frac{\pi_1}{6}=\pi_0 \\ \frac{\pi_0}{2}+\frac{\pi_1}{2}+\frac{\pi_2}{3}=\pi_1 \\ \frac{\pi_1}{3}+\frac{\pi_2}{2}+\frac{\pi_3}{2}=\pi_2 \\ \frac{\pi 2}{6}+\frac{\pi_3}{2}=\pi_3 \end{cases} \quad ; \sum_{i=0}^{3}\pi_i = 1 \ ,$$

il che implica $\pi_0=\pi_3=\frac{1}{8}, \pi_1=\pi_2=\frac{3}{8}$.

(a) Per la formula delle probabilità totali,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k-\sum_{i=0}^{N}\pi_i i\right|>\varepsilon\right\} &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k-\sum_{i=0}^{N}\pi_i i\right|>\varepsilon\right\}\middle| X_0\right] \\ &= \sum_{j=0}^{N} {}_j\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k-\sum_{i=0}^{N}\pi_i i\right|>\varepsilon\right\}\middle| X_0=j\right)\mathbb{P}\left\{X_0=j\right\} \\ &\le \sup_{j\in S}\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k-\sum_{i=0}^{N}\pi_i i\right|>\varepsilon\right\}\middle| X_0=j\right) \ . \end{aligned}$$

Siccome $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N}i\delta_{i,X_k}, \forall q\in S$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k-\sum_{i=0}^{N}\pi_i i\right|>\varepsilon\right\}\middle| X_0=q\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N}i\delta_{i,X_k}-\sum_{i=0}^{N}\pi_i i\right|>\varepsilon\right\}\middle| X_0=q\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N}i\delta_{i,X_k}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N}\pi_i i\right|>\varepsilon\right\}\middle| X_0=q\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N}i\left(\delta_{i,X_k}-\pi_i\right)\right|>\varepsilon\right\}\middle| X_0=q\right) \end{aligned}$$

e per la disuguaglianza di Chebichev,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N} i\left(\delta_{i,X_k}-\pi_i\right)\right|>\varepsilon\right\}\middle| X_0=q\right) \\
\leq\ & \varepsilon^{-2}\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N} i\left(\delta_{i,X_k}-\pi_i\right)\right|^2\middle| X_0=q\right] \\
=\ & \varepsilon^{-2}\mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} ij\left(\delta_{i,X_k}-\pi_i\right)\left(\delta_{j,X_l}-\pi_j\right)\middle| X_0=q\right] \\
=\ & \varepsilon^{-2}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} ij\mathbb{E}\left[\left(\delta_{i,X_k}-\pi_i\right)\left(\delta_{j,X_l}-\pi_j\right)\middle| X_0=q\right] \\
=\ & \varepsilon^{-2}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} ij\times \\
& \times\left(\left(P^k\right)_{q,i}\left(P^{l-k}\right)_{i,j}\delta_{k,k\wedge l}+\left(P^l\right)_{q,j}\left(P^{k-l}\right)_{j,i}\delta_{l,k\wedge l}-\pi_j\left(P^k\right)_{q,i}-\pi_i\left(P^l\right)_{q,j}+\pi_i\pi_j\right)\ .
\end{aligned}$$

Poiché per le catene di Markov omogenee a stati finiti il teorema ergodico implica che esiste $C>0, \rho\in(0,1)$ tale che per $n\geq 1$ sufficientemente grande $\forall i,j\in S$, $\left|\left(P^n\right)_{i,j}-\pi_j\right|<C\rho^n$,

$$\begin{aligned}
& \left(P^k\right)_{q,i}\left(P^{l-k}\right)_{i,j}\delta_{k,k\wedge l}+\left(P^l\right)_{q,j}\left(P^{k-l}\right)_{j,i}\delta_{l,k\wedge l}-\pi_j\left(P^k\right)_{q,i}-\pi_i\left(P^l\right)_{q,j}+\pi_i\pi_j \\
\leq\ & \left(\pi_i+C\rho^k\right)\left(\pi_j+C\rho^{l-k}\right)\delta_{k,k\wedge l}+\left(\pi_j+C\rho^l\right)\left(\pi_i+C\rho^{k-l}\right)\delta_{l,k\wedge l}+ \\
& -\pi_j\left(\pi_i-C\rho^k\right)-\pi_i\left(\pi_j-C\rho^l\right)+\pi_i\pi_j \\
=\ & \pi_jC\rho^k\delta_{k,k\wedge l}+C^2\rho^l\delta_{k,k\wedge l}+\pi_iC\rho^l\delta_{l,k\wedge l}+C^2\rho^k\delta_{l,k\wedge l}+\pi_jC\rho^k+\pi_iC\rho^l \\
\leq\ & C\rho^{k\wedge l}+C^2\rho^{k\vee l}+C\rho^k+C\rho^l\leq 2\left(C\vee C^2\right)\left(\rho^k+\rho^l\right)\ ,
\end{aligned}$$

perciò,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N} i\left(\delta_{i,X_k}-\pi_i\right)\right|>\varepsilon\right\}\middle| X_0=q\right) \\
\leq\ & \frac{2\left(C\vee C^2\right)}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} ij\left(\rho^k+\rho^l\right) \\
=\ & \frac{2\left(C\vee C^2\right)}{\varepsilon^2}\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\rho^k+\rho^l\right) \\
\leq\ & \frac{\left(C\vee C^2\right)}{\varepsilon^2}\left(N(N+1)\right)^2\frac{1}{1-\rho}\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\ .
\end{aligned}$$

■

**Esercizio 4** *Sia* $\{E_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di eventi stocasticamenti indipendenti subordinatamente alla conoscenza di un parametro* $\Theta$*, che si assume essere una v.a. la cui distribuzione di probabilità a priori è descritta dalla funzione di ripartizione (distribuzione)*

$$F_\Theta(\theta) := C\int_{-\infty}^{\theta} dy y^2 (1-y)\,\mathbf{1}_{[0,1]}(y) \ ,$$

*tale che* $\mathbb{P}(E_i|\Theta) = \Theta$. *Dopo le prime quatto osservazioni si registra che il primo ed il secondo evento sono accaduti, mentre il terzo ed il quarto evento non sono stati osservati.*

*Calcolare la densità di probabilità a posteriori di* $\Theta$ *e il valore che le massimizza.*

**Soluzione:** Consideriamo le vv.aa. $\xi_i := \mathbf{1}_{E_i}, i = 1,..,4$. La densità a posteriori di $\Theta$ dato il vettore aleatorio $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ sarà

$$\begin{gathered}
\pi_4(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c) = \\
\pi_4(\Theta = \theta | \{\omega \in \Omega : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (1,1,0,0)\}) = \\
K\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (1,1,0,0)\} | \Theta = \theta)\,\pi_0(\theta) \\
= K\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c | \Theta = \theta)\,\pi_0(\theta) \\
= K\mathbb{P}(E_1|\Theta = \theta)\,\mathbb{P}(E_2|\Theta = \theta) \times \\
\times \mathbb{P}(E_3^c|\Theta = \theta)\,\mathbb{P}(E_4^c|\Theta = \theta)\,\pi_0(\theta) = \\
K\mathbb{P}(E_1|\Theta = \theta)\,\mathbb{P}(E_2|\Theta = \theta)\,(1 - \mathbb{P}(E_3|\Theta = \theta)) \times \\
\times (1 - \mathbb{P}(E_4|\Theta = \theta))\,\pi_0(\theta) = K\theta^2 (1-\theta)^2\,\pi_0(\theta) \\
= \frac{70}{3}\theta^4 (1-\theta)^3
\end{gathered}$$

dove:

1. nel terzultimo passaggio si è usato che gli eventi $E_i, i \geq 1$, sono stocasticamenti indipendenti subordinatamente alla conoscenza di $\Theta$;

2. $$\pi_0(\theta) := \frac{d}{d\theta}F_\Theta(\theta) = \theta^2(1-\theta)\,C\mathbf{1}_{[0,1]}(\theta)$$

   con $C$ tale che

   $$\begin{aligned}
   1 &= CF_\Theta(1) = C\int_0^1 dy y^2 (1-y) \\
   &= C\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = C\frac{2}{4!} \Longrightarrow C = 12 \ ;
   \end{aligned}$$

3. $K$ è tale che

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} d\theta \pi_4 \left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\theta K \theta^2 \left(1-\theta\right)^2 \pi_0 \left(\theta\right) \\ &= 12K \int_0^1 d\theta \theta^4 \left(1-\theta\right)^3 \\ &= K12 \frac{\Gamma\left(5\right)\Gamma\left(4\right)}{\Gamma\left(9\right)} \Longrightarrow K = \frac{1}{12}\frac{8!}{4!3!} = \frac{7\cdot 5\cdot 2}{3} \end{aligned}$$

Il valore per cui la funzione $[0,1] \ni \theta \to \theta^4 \left(1-\theta\right)^3 \in [0,1]$ ammette un punto di massimo è $\theta_0 = \frac{4}{7}$. ■