Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

a.a.2022/2023
23/11/2023

Esercizio 1 8 *amici,* 4 *maschi e* 4 *femmine escono a cena.*

1. *Calcolare il numero di modi in cui gli amici possono sedersi al tavolo in modo che ciascun uomo risulti a distanza di un posto da un altro uomo.*
2. *Calcolare la probabilità che, se gli amici scelgono di sedersi come descritto al punto precedente, un uomo ed una donna di una data coppia capitino seduti vicini.*
3. *Calcolare la probabilità che un uomo ed una donna di una data coppia capitino seduti vicini indipendentemente da come gli amici scelgono di sedersi al tavolo.*

Soluzione:

1. Numeriamo le sedie da 1 a 8. L'insieme E che rappresenta tutti i modi in cui gli amici possono sedersi al tavolo in modo che ciascun maschio risulti a distanza di un posto da un altro maschio sarà dato dall'unione (disgiunta) dell'insieme E_d che rappresente la collezione di tutti i modi in cui si possono far sedere i maschi sulle sedie etichettate dai numeri dispari (e quindi le femmine sulle sedie etichettate dai numeri pari) e dell'insieme E_d che rappresente la collezione di tutti i modi in cui si possono far sedere i maschi sulle sedie etichettate dai numeri pari (e quindi le femmine sulle sedie etichettate dai numeri dispari).

   In quanti modi posso far sedere 4 amici maschi su 4 sedie? Si tratta di un problema di campionamento ordinato senza reimbussolamento. Ovvero, il numero di modi in cui posso far sedere 4 amici maschi su 4 sedie è pari alla cardinalità dello spazio degli eventi che rappresentano tutti i possibili esiti di un estrazione di 4 palline numerate da un urna che le contiene in modo tale che, una volta estratta, una pallina **non** venga reinserita nell'urna. Ciò corrisponde quindi a calcolare tutti gli elementi dell'insieme

   $$\Omega := \{\omega = (a_1, .., a_4) : \forall i, j = 1, .., 4 \text{ tali che } i \neq j,\ a_i \neq a_j \text{ e } \forall i = 1, .., 4,\ a_i = 1, 2, 3, 4\} \ .$$

   Pertanto, $|\Omega| = 4!$. Analogamente, il numero di modi in cui posso far sedere 4 amiche su 4 sedie sarà pari a 4! e quindi $|E_d|$, la cardinalità di E_d, è pari a $(4!)^2$. Poiché gli elementi dell'insieme E_p si possono ottenere da quelli dell'insieme E_d scambiando gli uomini con le donne, otteniamo $|E_p| = (4!)^2$. Dunque, $|E| = |E_d \cup E_d| = |E_d \bigvee E_d| = 2\,(4!)^2$.

   Alternativamente, si può procedere in questo modo. Si può far sedere prima le donne e poi gli uomini. La prima donna può sedersi in 8 posti. La seconda ha a disposizione 3 posti per sedersi rispettando il vincolo di stare a distanza di un posto dalle altre donne. La terza quindi avrà a disposizione 2 posti e la quarta soltanto un posto. Analogamente il primo tra gli uomini a sedersi avrà a disposizione 4 posti, il secondo 3 posti, il terzo 2 e il quarto sarà obbligato a sedersi in quello che rimane. Pertanto le donne potranno disporsi in $8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ modi, mentre gli uomini in $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ modi quindi in totale le coppie uomo-donna potranno sedersi al tavolo in $2\left(4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2\right) = 2\,(4!)^2$ modi.

2. Senza perdita di generalità etichettiamo i maschi con i numeri dispari da 1 a 8 e le femmine con quelli pari. Consideriamo l'insieme F delle coppie di amici maschio-femmina non ordinate, ovvero le coppie non ordinate composte da un numero pari ed uno dispari. Poiche ogni coppia così fatta rappresenta la classe di equivalenza delle coppie di numeri composta da una cifra pari ed una dispari di numeri da 1 a $8, F$ ha lo stesso numero di elementi dell'insieme delle coppie ordinate di numeri da 1 a 8 che hanno la prima cifra dispari. Scelto un elemento di questo insieme, il numero di modi possibili di posizionarlo all'interno di una stringa di 8 numeri in cui il primo elemento della stringa e l'ultimo si considerano adiacenti è pari a 8. Questi, infatti rappresentano il numero di modi in cui una data coppia di amici composta da un maschio e da una femmina possano posizionarsi su sedie adiacenti in modo che se il maschio siede sulla sedia etichettata dal numero i, la femmina sieda sulla sedia etichettata dal numero $i+1$. Quindi il numero di modi con cui le coppie di amici maschio-femmina possano sedersi al tavolo in modo che la donna occupi la sedia etichettata con il numero successivo a quella su cui è seduto il suo collega di coppia si può ottenere accomodando prima la coppia selezionata e poi le rimanenti. E' chiaro che una volta posizionata la coppia selezionata, ragionando come al punto precedente, rinominando le sedie libere da 1 a 6, ovvero dispnendo prima i restanti 3 uomini a distaza di un posto tra loro e successivamente disponendo le donne, il numero di modi in cui le coppie di amici maschio-femmina rimanenti possano sedersi al tavolo in modo che la donna occupi la sedia etichettata con il numero successivo a quella su cui è seduto il suo collega di coppia è pari alla cardinalità di

$$\Omega := \{\omega = (a_1, a_2, a_3) : \forall i, j = 1,2,3 \text{ tali che } i \neq j,\ a_i \neq a_j \text{ e } \forall i = 1,2,3,\ a_i = 1,2,3\}$$

cioè $(3!)^2$. Pertanto, il numero di modi con cui le coppie di amici maschio-femmina possano sedersi al tavolo in modo che la donna occupi la sedia etichettata con il numero successivo a quella su cui è seduto il suo collega di coppia è pari a $8\,(3!)^2$. Analogamente, scambiando le etichette dei maschi con quelle delle femmine si ottiene che il numero di modi con cui le coppie di amici maschio-femmina possano sedersi al tavolo in modo che la donna occupi la sedia etichettata con il numero precedente a quella su cui è seduto il suo collega di coppia è pari a $8\,(3!)^2$. Dunque, il numero di modi con cui le coppie di amici maschio-femmina possano sedersi al tavolo in modo che una determinata coppia uomo-donna capiti seduta su posti adiacenti è pari a $8\,(3!)^2\,2$. Perciò, la probabilità che, se gli amici scelgono di sedersi come descritto al punto precedente, un uomo ed una donna di una data coppia capitino seduti vicini è

$$\frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\{\text{casi possibili}\}|} = \frac{8\,(3!)^2\,2}{2\,(4!)^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}\ .$$

3. Se una volta posizionata la coppia data in cui la donna siede sulla sedia etichettata con il numero successivo a quello che indica la sedia su cui siede il collega di coppia, le altre persone possono sedersi come meglio desiderano, il numero di modi in cui ciò può essere fatto è pari

alla cardinalità dell'insieme che rappresenta gli esiti di un estrazione senza reimbussolamento di un campione di 6 palline da un urna contenete palline numerate da 1 a 6, ovvero

$$\Omega := \{\omega = (a_1, .., a_6) : \forall i, j = 1, .., 6 \text{ tali che } i \neq j,\ a_i \neq a_j \text{ e } \forall i = 1, .., 4,\ a_i = 1, .., 6\}\ .$$

Considerazioni analoghe valgono nel caso in cui si consideri che la data coppia sia posizionata in modo che la sedia su cui siede l'uomo della coppia scelta sia etichettata con un numero che segue quello con cui è etichettata la sedia della collega di coppia. Percio, in questo caso il numero di casi favorevoli è $8\,(6!)\,2$, mentre il numero di casi possibili è pari alla cardinalità dell'insieme

$$\Omega := \{\omega = (a_1, .., a_8) : \forall i, j = 1, .., 8 \text{ tali che } i \neq j,\ a_i \neq a_j \text{ e } \forall i = 1, .., 8,\ a_i = 1, .., 8\}$$

corrispondente alla collezione degli esiti di un estrazione senza reimbussolamento di un campione di 8 palline da un urna contenete palline numerate da 1 a 8, cioè $|\Omega| = 8!$. Dunque, in questo caso, la probabilità che un uomo ed una donna di una data coppia capitino seduti vicini indipendentemente da come gli amici scelgono di sedersi al tavolo risulta

$$\frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\{\text{casi possibili}\}|} = \frac{8\,(6!)\,2}{8!} = \frac{2}{7}\ .$$

■

Esercizio 2 *Si consideri il vettore aleatorio di componenti X e Y uniformemente distribuito sull'insieme* $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\right\}$.

1. *Calcolare la desità della distribuzione di probabilità congiunta e le densità marginali delle componenti.*
2. *Le variabili aleatorie X e Y sono tra loro indipendenti?*
3. *Calcolare la densità di probabilità della variabile aleatoria $Z := X^2$.*

Soluzione:

1. La regione Ω del piano $\mathbb{R}^2$ su cui ha supporto la densità di probabilità del vettore aleatorio (X, Y) è delimitata da un ellisse di semiasse minore pari a $\frac{1}{2}$ e semiasse maggiore pari a 1. Pertanto, poiché $\Omega = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2\ :\ \left(\frac{u}{\frac{1}{2}}\right)^2 + v^2 \leq 1\right\}$, ha area uguale a π per il prodotto dei semiassi, la densità di probabilità $f_{(X,Y)}$ di (X, Y) è $\frac{2}{\pi}\mathbf{1}_\Omega(x, y)$, dove la funzione $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto \mathbf{1}_\Omega(x, y) := \begin{cases} 1 & se\ (x, y) \in \Omega \\ 0 & altrimenti \end{cases} \in \{0, 1\}$ rappresenta la funzione indicatrice di Ω.

   Denotando con f_X la densità di X e con f_Y, si ha

   $$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} dy f_{(X,Y)}(x, y) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\,\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} dy = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\,\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\ .$$

   Analogamente,

   $$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} dx f_{(X,Y)}(x, y) = \mathbf{1}_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(y)\,\frac{2}{\pi}\int_{-\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-4y^2}} dx = \mathbf{1}_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(y)\,\frac{4}{\pi}\sqrt{1-4y^2}\ .$$

2. Posto $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, il punto $\left(1-\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon\right) \in [-1,1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ non appartiene a Ω se verifica l'equazione
$$(1-\varepsilon)^2 + 4\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^2 > 1 \ ,$$
ovvero se ε è tale che
$$1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + 4\left(\frac{1}{4} - \varepsilon + \varepsilon^2\right) = 2 - 6\varepsilon + 5\varepsilon^2 > 1 \ ,$$
cioè se $5\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 1 > 0$ e dunque se $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$. Quindi, per tali valori di ε, $f_X(1-\varepsilon) f_Y\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right) > 0$ sebbene $f_{(X,Y)}\left(1-\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon\right) = 0$. Perciò X e Y non sono indipendenti.
3. Sia f_Z la densità di probabilità della variabile aleatoria Z e F_Z la sua funzione di ripartizione. Poiché, per definizione $f_Z(z) := \frac{d}{dz} F_Z(z)$ e $F_Z(z) := \mathbb{P}\{Z \leq z\}$, siccome
$$\{Z \leq z\} = \left\{X^2 \leq z\right\} = \left\{|X| \leq \sqrt{z}\right\} = \left\{-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}\right\} \ ,$$
si ha
$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{d}{dz}\mathbb{P}\left\{-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}\right\} = \frac{d}{dz}\left[F_X\left(\sqrt{z}\right) - F_X\left(-\sqrt{z}\right)\right] \\ &= f_X\left(\sqrt{z}\right)\frac{1}{2\sqrt{z}} + f_X\left(-\sqrt{z}\right)\frac{1}{2\sqrt{z}} \\ &= \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-z}{z}}\mathbf{1}_{[0,1]}(z) \ . \end{aligned}$$

■

Esercizio 3 *Sia $(x_1, .., x_n)$ una collezione di osservazioni del campione $(X_1, .., X_n)$ di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite la cui densità di probabilità è $\mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x|\theta) := \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|} \in \mathbb{R}^+$. Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza del campione.*

Soluzione: La funzione di verosimiglianza associata alla collezione di osservazioni $(x_1, .., x_n)$ risulta
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta|x_1, .., x_n) \quad &: \quad = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \prod_{i=1}^n e^{-\theta|x_i|} \\ &= \quad e^{n\log\frac{\theta}{2} - \theta\sum_{i=1}^n x_i} \ . \end{aligned}$$
Ponendo
$$L(\theta|x_1, .., x_n) := \log \mathcal{L}(\theta|x_1, .., x_n) = n\log\theta - \theta\sum_{i=1}^n x_i - n\log 2 \ ,$$
poiché massimizzare $\mathbb{R}^+ \ni \theta \longmapsto \mathcal{L}(\theta|\cdot) \in \mathbb{R}^+$ è equivalente a massimizzare $\mathbb{R}^+ \ni \theta \longmapsto L(\theta|\cdot) \in \mathbb{R}^+$, siccome $\frac{\partial^2}{(\partial\theta)^2} L(\theta|\cdot) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$, si ha che $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^+$ tale che $\frac{\partial}{\partial\theta} L(\theta|\cdot) \restriction_{\theta=\bar{\theta}} = 0$, ovvero
$$\bar{\theta}(x_1, .., x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}$$
è il valore dello stimatore di massima verosimiglianza del campione $(X_1, .., X_n)$ calcolato nelle realizzazioni $(x_1, .., x_n)$ delle osservazioni del campione. ■