Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

a.a.2024/2025
25/02/2025

Esercizio 1 *Un concessionario di auto monomarca propone alla vendita un modello ibrido, uno ibrido plug-in e uno full electric, ciascuno negli allestimenti basic, optional e full optional nonché in 5 colori diversi. Supponiamo che ciascuna combinazione di modello, allestimento e colore abbia la stessa probabilità di essere scelta dai clienti.*

1. *Calcolare qual è la probabilità che due clienti acquistino la stessa identica auto.*
2. *Se in una settimana sono state vendute 6 autovetture, calcolare la probabilità che siano state vendute almeno 2 autovetture identiche.*

Da una statistica risulta che il 60% dei clienti che acquistano un'autovettura full electric acquista anche l'abbonamento all'aggiornamento automatico del navigatore, mentre questa percentuale scende al 45% per i modelli di auto ibrida.

1. *Se in un anno sono state vendute 100 autovetture qual è il valore atteso e la varianza del numero di clienti che hanno scelto di acquistare l'abbonamento all'aggiornamento automatico del navigatore.*
2. *Qual e la probabilità che un cliente acquisti un'autovettura full electric sapendo che ha acquistato anche l'abbonamento all'aggiornamento automatico del navigatore.*

Soluzione:

1. Si tratta di un problema di campionamento con reimbussolamento ordinato. Sia S l'insieme delle possibili scelte di un auto da parte dei clienti. Allora $|S| = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$. Sia $X_i, i = 1, 2$, la v.a. che indica la scelta dell'auto effettuata dell'i-simo cliente, perciò $\{X_i = j\}$ è l'evento che l'i-simo cliente abbia acquistato la j-sima combinazione tra i modelli, gli allestimenti e i colori possibili. La probabilità che due clienti scelgano un'auto corrispondente al j-simo elemento di S è pari alla probabilità di estrarre un campione di 2 palline identiche da un urna di palline numerate da 1 a 45 con reimbussolamento, ovvero $\left(\frac{1}{45}\right)^2$. Quindi, la probabilità che due clienti facciano la stessa scelta è

$$\mathbb{P}\{X_1 = X_2\} = \sum_{j=1}^{|S|} \mathbb{P}\{X_1 = X_2 = j\} = 45 \cdot \left(\frac{1}{45}\right)^2 = \frac{1}{45} \ .$$

2. Sia A l'evento che indica che tra i 6 clienti almeno 2 hanno acquistato la stessa identica autovettura. Allora, $\mathbb{P}(A) = 1-\mathbb{P}(A^c)$ dove A^c è l'evento che tutti i 6 clienti hanno acquistato autovetture diverse. Sia Ω la collezione di campioni ordinati di 6 palline scelti da un urna di palline numerate da 1 a 45 con reimbussolamento: $|\Omega| = (45)^6$. Perciò,

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\Omega|} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{(45)^6}$$

e $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41\cdot40}{(45)^6}$.

3. Sia X_i la v.a. che indica se il cliente che ha acquistato l'i-sima autovetura tra quelle vendute in un anno ha acuistato anche l'abbonamento all'aggiornamento automatico del navigatore. Perciò, la v.a. $N := \sum_{i=1}^{100} X_i$ rappresenta il numero di clienti che hanno scelto di acquistare l'abbonamento all'aggiornamento automatico del navigatore. Indicando con F l'evento che il modello di auto acquistata sia full electric, $\forall i = 1,..,100$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_i = 1\} &= \mathbb{P}(\{X_i = 1\}|F)\,\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(\{X_i = 1\}|F^c)\,\mathbb{P}(F^c) \\ &= \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{45}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}\frac{1}{3} + \frac{9}{20}\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

Perciò, poiché le X_i sono v.a.i.i.d. $Ber\left(\frac{1}{2}\right)$, $N \stackrel{d}{=} Bin\left(100, \frac{1}{2}\right)$ quindi $\mathbb{E}[N] = 50$ e $Var[N] = 25$.

4. Usando la formula di Bayes, $\forall i = 1,..,100$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|\{X_i = 1\}) &= \mathbb{P}(\{X_i = 1\}|F)\frac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}\{X_i = 1\}} \\ &= \frac{3}{5}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\ .\end{aligned}$$

■

Esercizio 2 *Sia (X,Y) un vettore aleatorio uniformemente distribuito sull'insieme*

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \geq 0, y \leq 1, x \leq 1\right\}.\ .$$

1. *Calcolare la costante di normalizzazione della densità di probabilità congiunta.*

2. *Verificare se le componenti del vettore sono indipendenti e in caso contrario calcolare la densità della probabilità condizionata della componente Y rispetto alla componente X.*

3. *Calcolare la matrice di covarianza di (X,Y), ovvero*

$$\begin{pmatrix} Cov(X,X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Cov(Y,Y) \end{pmatrix}\ .$$

4. *Calcolare la distribuzione della v.a. $Z := X \wedge Y$.*

Soluzione:

1. L'area di D è pari a 2. Perciò, la densità di probabilità del v.a. (X,Y) è $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_D(x,y)$.

2. La marginale della prima componente di (X,Y) è
$$f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\int_{-x}^{1} dy = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)(1+x) \ .$$
La marginale della seconda componente di (X,Y) è
$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1)}(y)\int_{-y}^{1} dx = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)(1+y) \ .$$
Poiché, scelto il punto $(0,-2)$,
$$\frac{1}{2} = f_{X,Y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \neq f_X\left(\frac{1}{2}\right) f_Y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \ ,$$
le componenti del vettore aleatorio (X,Y) non sono indipendenti. Perciò
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{\mathbf{1}_D(x,y)}{\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)(1+x)} = \frac{1}{1+x}\mathbf{1}_D(x,y) \ .$$

3.
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int dx f_X(x)\,x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\,(1+x)\,x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx x^2 = \frac{1}{3} \ , \\ \mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int dx f_X(x)\,x^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\,(1+x)\,x^3 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx x^4 = \frac{1}{5} \ , \end{aligned}$$
quindi la varianza di X è $\mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}^2[X] = \frac{4}{45}$. Allo stesso modo
$$\mathbb{E}[Y] = \int dy f_Y(y)\,y = \frac{1}{3} \ ; \ \mathbb{E}\left[Y^2\right] = \int dy f_Y(y)\,y^2 = \frac{1}{5} \ ,$$
quindi la varianza di Y è $\mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}^2[Y] = \frac{4}{45}$. Inoltre,
$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{2}\int_D dxdyxy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dyy\int_{-y}^{1} dxx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dyy\left(1-y^2\right) = 0 \ ,$$
perciò $Cov(Y,X) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = -\frac{1}{25}$.

4.
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z > z\} &= \mathbb{P}\{X > z, Y > z\} = \frac{1}{2}\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y+x\geq 0, z\leq y\leq 1, z\leq x\leq 1\}} dxdy \\ &= \mathbf{1}_{(-\infty,-1]}(z) + \left(1 - \frac{(1-z)^2}{2}\right)\mathbf{1}_{(-1,0]}(z) + \frac{(1-z)^2}{2}\mathbf{1}_{(0,1]}(z) \ , \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Z \leq z\} &= 1-\mathbb{P}\{Z > z\} = \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(z) + \frac{(1-z)^2}{2}\mathbf{1}_{(-1,0]}(z) + \\ &+ \left(1-\frac{(1-z)^2}{2}\right)\mathbf{1}_{(0,1]}(z)\end{aligned}$$

■

Esercizio 3 *Supponiamo di avere una successione di vv.aa.* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *sullo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *che descrive una catena di Markov con* 6 *stati,* $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ *tale che: dallo stato* 1 *si transisce con probabilità* $\frac{1}{6}$ *allo stato* 2 *e allo stato* 6*, nonché con probabilità* $\frac{2}{3}$ *allo stato* 4*. Dallo stato* 2*, si transisce con probabilità* $\frac{1}{2}$ *allo stato* 1 *e allo stato* 3*. Dallo stato* 3 *si transisce con probabilità* $\frac{2}{3}$ *allo stato* 2 *e con probabilità* $\frac{1}{3}$ *allo stato* 4*. Dallo stato* 4 *si transisce con probabilità* $\frac{1}{3}$ *allo stato* 3 *e con probabilità* $\frac{2}{3}$ *allo stato* 5*. Dallo stato* 5 *si transisce con probabilità* $\frac{1}{2}$ *allo stato* 4 *e allo stato* 6*. Dallo stato* 6 *si transisce con uguale probabilità* $\frac{1}{3}$ *agli stati* 1, 3 *e* 5*.*

1. *Scrivere la matrice di probabilità di transizione tra gli stati della catena, elencarne le classi di equivalenza e calcolarne il periodo.*

2. *Calcolare, se esistono,* $\lim_{n\to\infty} P^{(2n)}_{1,5}$, $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}_{3,5}$, $\lim_{n\to\infty} P^{(2n)}_{2,5}$ *e* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega\in\Omega : X_n(\omega) = 5\}$ *assumendo che la distribuzione iniziale è* $\mathbb{P}\{\omega\in\Omega : X_0(\omega) = 1\} = \mathbb{P}\{\omega\in\Omega : X_0(\omega) = 2\} = \frac{1}{2}$ *e* $\mathbb{P}\{\omega\in\Omega : X_0(\omega) \neq \{1,2\}\} = 0$*.*

Soluzione:

1. $$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

   La catena ha un unica classe di stati comunicanti di periodo 2. Poiché

   $$P^2 = \begin{pmatrix} 5/36 & 0 & \frac{13}{36} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{12} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{18} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

   la catena ha due classi cicliche $C_1 := \{1,3,5\}$ e $C_2 := \{2,4,6\}$.

2. Le restrizioni di P^2 a C_1 e a C_2 sono

   $$P_1 := \begin{pmatrix} \frac{5}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \; ; \; P_2 := \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{2} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} .$$

La catena di Markov descritta dalla matrice di transizione di probabilità P_1 sull'insieme degli stati C_1 ha un'unica classe aperiodica di stati comunicanti, quindi vale il teorema ergodico. La distribuzione di probabilità invariante per questa catena è data dal vettore riga (π_1, π_3, π_5) che risolve

$$\begin{cases} \frac{5}{36}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_5 = \pi_1 \\ \frac{13}{36}\pi_1 + \frac{4}{9}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_5 = \pi_3 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{9}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_5 = \pi_5 \end{cases} ,$$
$$\pi_1 + \pi_3 + \pi_5 = 1$$

da cui si ottiene $\pi_1 = \frac{132}{589}, \pi_3 = \frac{225}{589}, \pi_5 = \frac{232}{589}$.
Analoghe considerazioni valgono per la catena di Markov descritta dalla matrice di transizione di probabilità P_2 sull'insieme degli stati C_2.

Pertanto, $\lim_{n\to\infty} P_{1,5}^{(2n)} = \pi_5; \lim_{n\to\infty} P_{2,5}^{(2n)} = 0$ poiché $P_{2,5}^{(2n)} = 0$ per ogni $n \geq 1$; il $\lim_{n\to\infty} P_{3,5}^{(n)}$ non esiste poiché $\lim_{k\to\infty} P_{3,5}^{(2k)} = \pi_5$, ma $\lim_{k\to\infty} P_{3,5}^{(2k+1)} = 0$ poiché $P_{3,5}^{(2k+1)} = 0$ per ogni $k \geq 0$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 5\} &= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 5\} \mid \{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = i\}) \times \\ &\quad \times \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = i\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} (P^n)_{1,5} + \lim_{n\to\infty} (P^n)_{2,5}\right) . \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{k\to\infty} P_{1,5}^{(2k)} = \pi_5$ e $\lim_{k\to\infty} P_{1,5}^{(2k+1)} = 0; \lim_{k\to\infty} P_{2,5}^{(2k)} = 0$ e

$$\lim_{k\to\infty} P_{2,5}^{(2k+1)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{6} P_{2,i} \left(P^{2k}\right)_{i,5} = \sum_{i=1,3,5} P_{2,i} \lim_{k\to\infty} \left(P^{2k}\right)_{i,5} = \pi_5 ,$$

otteniamo

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_{2k}(\omega) = 5\} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_{2k+1}(\omega) = 5\} = \frac{\pi_5}{2} ,$$

ovvero $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 5\} = \frac{\pi_5}{2}$.

■

Esercizio 4 *Sia* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di vv.aa. stocasticamente indipendenti, subordinatamente alla conoscenza di un parametro* Θ, *con densità di probabilità condizionata marginale*

$$f(x_i|\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta}{2}(x_i - 1)^2\right\} , \ x_i \in \mathbb{R} .$$

Supponendo che la densità a priori di Θ *sia un esponenziale di parametro* 2, *se si osservano i primi valori* $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 2$, *della successione.*

1. *Calcolare la densità di probabilità a posteriori di* Θ *e il suo punto di massimo.*

2. *Calcolare la probabilità a posteriori dell'evento* $\{\Theta \leq 2\}$.
3. *Calcolare valore atteso e varianza a posteriori della v.a.* $Z = \Theta^{-1}$.

Soluzione:

1. La densità a posteriori di Θ sarà pari a

$$\pi\left(\Theta = \theta|\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right)\right) =$$
$$= K f_\Theta\left(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 2\right)\pi_\Theta\left(\theta\right)$$
$$= K f\left(x_1 = \frac{1}{2}|\theta\right) f\left(x_2 = 1|\theta\right) f\left(x_3 = \frac{3}{2}|\theta\right) f\left(x_4 = 2|\theta\right) e^{-2\theta}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\left(\theta\right)$$
$$= \frac{K}{\left(2\pi\right)^2}\theta^2 e^{-\theta\left[\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1\right)}{2}+2\right]}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\left(\theta\right) = \frac{K}{\left(2\pi\right)^2}\theta^2 e^{-\theta\frac{11}{4}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\left(\theta\right) \ ,$$

   e quindi è una $\Gamma\left(3, \frac{11}{4}\right)$. Perciò $K = \left(2\pi\right)^2\left(\frac{11}{4}\right)^3\frac{1}{2} = \pi^2\frac{(11)^3}{2^5}$.
   Il punto di massimo si ha per $\theta = \frac{4}{11}$.

2. Ponendo $\lambda = \frac{11}{4}$, integrando due volte per parti, la probabilità a posteriori dell'evento $\{\Theta \leq 2\}$ risulta allora pari a

$$\frac{\lambda^3}{2}\int_0^2 d\theta\theta^2 e^{-\theta\lambda} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(4\lambda^2 + 2\lambda + 1\right)e^{-2\lambda}\right] \ .$$

3. Il valore atteso a posteriori di $\frac{1}{\Theta}$ è pari a

$$\frac{\lambda^3}{2}\int_0^{+\infty} d\theta\theta e^{-\theta\lambda} = \frac{\lambda}{2} \ ;$$

   il valore atteso a posteriori di $\frac{1}{\Theta^2}$ è pari a

$$\frac{\lambda^3}{2}\int_0^{+\infty} d\theta e^{-\theta\lambda} = \frac{\lambda^2}{2} \ .$$

   Perciò la varianza a posteriori di Θ è uguale a $\frac{\lambda^2}{4}$.

■