

Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

a.a.2023/2024
26/03/2024

Esercizio 1 Sapendo che la probabilità che un uomo nasca affetto da daltonismo è del 7% mentre che ciò accada ad una donna è dello 0,5%, considerato un gruppo di N persone costituito da M uomini e F donne scelti a caso, determinare:

1. la probabilità che nel gruppo non ci siano persone daltoniche.
2. la probabilità che nel gruppo ci siano esattamente un uomo daltonico e nessuna donna daltonica.
3. Se Z indica il numero totale di persone daltoniche del gruppo. Calcolare il valore atteso di Z .
4. Scelta a caso una persona nel gruppo, qual è la probabilità che sia un uomo sapendo che si tratta di una persona daltonica.

Soluzione: Sia $\{X_i\}_{i=1}^F$ la collezione di vv.aa. i.i.d. con distribuzione di Bernoulli di parametro f ciascuna delle quali indica se l' i -esima donna del gruppo è afflitta o meno da daltonismo, ovvero, per ogni $i = 1, \dots, F$, X_i è la funzione indicatrice dell'evento {l' i -esima donna del gruppo è daltonica}. Allo stesso modo, indichiamo con $\{Y_j\}_{j=1}^M$ la collezione di vv.aa. i.i.d. con distribuzione di Bernoulli di parametro m , ciascuna delle quali indipendente da quelle della collezione $\{X_i\}_{i=1}^F$, tali che Y_j indica se il j -esimo uomo del gruppo è afflitto o meno da daltonismo, ovvero, per ogni $j = 1, \dots, M$, Y_j è la funzione indicatrice dell'evento {il j -esimo uomo del gruppo è daltonico}.

1. L'evento

$$\{\text{nel gruppo non ci sono persone daltoniche}\} = \left(\bigcap_{i=1}^F \{X_i = 0\} \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^M \{Y_j = 0\} \right),$$

perciò la sua probabilità è $(1 - f)^F (1 - m)^M$.

2. Sia U la v.a. che conta il numero di uomini daltonici nel gruppo, cioè $U = \sum_{j=1}^M Y_j$. Poiché le vv.aa. Y_1, \dots, Y_M sono i.i.d. $U \stackrel{d}{=} \text{Bin}(m, M)$. Analogamente, $V := \sum_{i=1}^F X_i \stackrel{d}{=} \text{Bin}(f, F)$ è la v.a. che conta il numero di donne daltoniche nel gruppo. Inoltre, poiché ogni

elemento di $\{X_i\}_{i=1}^F$ è stocasticamente indipendente da ogni elemento di $\{Y_j\}_{j=1}^M$, U e V sono tra loro stocasticamente indipendenti. Perciò,

$$\begin{aligned} & \{\text{nel gruppo c'è solo un uomo daltonico e nessuna donna daltonica}\} \\ & = \{U = 1\} \cap \{V = 0\} \end{aligned}$$

la cui probabilità è $Mm^1(1-m)^{M-1}(1-f)^F$.

3. $Z = U + V$. Perciò, $\mathbb{E}[U + V] = \mathbb{E}[U] + \mathbb{E}[V] = Mm + Ff$.
4. Sia α la v.a. che indica che la persona scelta a caso tra quelle del gruppo sia uomo, ovvero α è la funzione indicatrice dell'evento $\{\text{la persona scelta a caso è uomo}\}$, che una v.a. di Bernoulli di parametro $p = \frac{M}{N}$. Analogamente, W la v.a. che indica se la persona scelta a caso dal gruppo sia o meno daltonica, ovvero W è la funzione indicatrice dell'evento $\{\text{la persona scelta a caso è daltonica}\}$. W è una v.a con distribuzione di Bernoulli di parametro q dove, per la formula delle probabilità totali,

$$q = \mathbb{P}\{W = 1\} = \mathbb{P}(\{W = 1\} | \{\alpha = 1\})\mathbb{P}\{\alpha = 1\} + \mathbb{P}(\{W = 1\} | \{\alpha = 0\})\mathbb{P}\{\alpha = 0\} .$$

Ma poiché $\mathbb{P}(\{W = 1\} | \{\alpha = 1\})$ è la probabilità che la persona scelta sia daltonica sapendo che è donna e $\mathbb{P}(\{W = 1\} | \{\alpha = 0\})$ è la probabilità che la persona scelta sia daltonica sapendo che è uomo, otteniamo $q = fp + m(1-p)$. Allora, per la formula di Bayes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\alpha = 0\} | \{W = 1\}) & = \mathbb{P}(\{W = 1\} | \{\alpha = 0\}) \frac{\mathbb{P}\{\alpha = 0\}}{\mathbb{P}\{W = 1\}} \\ & = \frac{m(1-p)}{fp + m(1-p)} . \end{aligned}$$

■

Esercizio 2 Sia (X, Y) un vettore aleatorio uniformemente distribuito sull'insieme

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\} .$$

1. Calcolare la costante di normalizzazione della densità di probabilità congiunta.
2. Verificare se le componenti del vettore sono indipendenti e in caso contrario calcolare la densità della probabilità condizionata della componente Y rispetto alla componente X .
3. Calcolare la matrice di covarianza di (X, Y) , ovvero

$$\begin{pmatrix} \text{Cov}(X, X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(Y, X) & \text{Cov}(Y, Y) \end{pmatrix} .$$

Soluzione:

1. La costante di normalizzazione c della densità di probabilità di (X, Y) è pari all'inverso della differenza tra l'area del quadrato $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ e quella del disco $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ovvero $c = \frac{1}{4-\pi}$.

2. Le densità di probabilità marginali di (X, Y) sono

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \left(\int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy \right) \frac{1}{4-\pi} \\ &= \frac{2}{4-\pi} \left(1 - \sqrt{1-x^2} \right) \end{aligned}$$

e, analogamente, per simmetria rispetto allo scambio degli assi coordinati,

$$f_Y(y) = \frac{2}{4-\pi} \left(1 - \sqrt{1-y^2} \right) \mathbf{1}_{[-1,1]}(y) .$$

Da cui segue che le vv.aa. X e Y non sono tra loro stocasticamente indipendenti. Infatti, scegliendo per esempio il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si ottiene

$$f_X\left(\frac{1}{2}\right) f_Y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{(4-\pi)^2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \neq f_{(X,Y)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 .$$

Allora,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{1}_{[-1, -\sqrt{1-x^2}]}(y) + \mathbf{1}_{[\sqrt{1-x^2}, 1]}(y)}{(1 - \sqrt{1-x^2})} .$$

3. Poiché f_X è una funzione pari supportata su un intervallo simmetrico, mentre la funzione identità $(\mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R})$ è dispari, $\mathbb{E}[X] = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \frac{2}{4-\pi} \int_{-1}^1 dx x^2 \left(1 - \sqrt{1-x^2} \right) = \\ &= \frac{2}{4-\pi} \left[\frac{2}{3} - \int_{-1}^1 dx x^2 \sqrt{1-x^2} \right] \\ &= \frac{2}{4-\pi} \left[\frac{2}{3} + \frac{\pi}{8} \right] , \end{aligned}$$

poiché

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 dx x^2 \sqrt{1-x^2} &= \int_{\pi}^{2\pi} dt \sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} \int_{\pi}^{2\pi} dt \sin^2(2t) \\ &= \frac{1}{8} \int_{2\pi}^{4\pi} du \sin^2 u = \frac{1}{16} (x - \sin x \cos x) \Big|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{\pi}{8} . \end{aligned}$$

Analoghe considerazioni valgono per la v.a. Y .

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(Y, X) = \mathbb{E}[XY] = \frac{1}{4 - \pi} \int_D dx dy xy \\
 &= \frac{1}{4 - \pi} \left[\int_Q dx dy xy - \int_C dx dy xy \right] \\
 &= \frac{1}{4 - \pi} \left[\left(\int_{-1}^1 dx x \right)^2 - \int_0^1 d\rho \rho^3 \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \sin \theta \right] \\
 &= -\frac{1}{4 - \pi} \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\theta \sin 2\theta = -\frac{1}{4 - \pi} \frac{1}{16} \int_0^{4\pi} dt \sin t \\
 &= \frac{1}{4 - \pi} \frac{1}{16} \cos t \Big|_0^{4\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{pmatrix} \text{Cov}(X, X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(Y, X) & \text{Cov}(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{8} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{8} \end{pmatrix}.$$

■

Esercizio 3 Supponiamo di avere una successione di v.v.a.a. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ che descrive una catena di Markov con 4 stati, $S = \{1, 2, 3, 4\}$ tale che: dallo stato 1 si transisce con probabilità $\frac{1}{2}$ agli stati 2 e 3. Dallo stato 2, si transisce con probabilità $\frac{1}{2}$ agli stati 1 e 4. Dallo stato 3 si transisce con probabilità $\frac{1}{2}$ agli stati 1 e 4. Dallo stato 4 si transisce con probabilità $\frac{1}{2}$ agli stati 2 e 3.

1. Elencare le classi di equivalenza degli stati e calcolarne il periodo.
2. Calcolare $\mathbb{P}(\{X_5 = 2\} | \{X_2 = 3\})$ e, assumendo come distribuzione iniziale quella uniforme, calcolare $\mathbb{E}[X_2]$.
3. Se $\{P_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,4}$ indica la matrice delle probabilità di transizione tra gli stati della catena, calcolare se esistono: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 4\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{1,2}^n + P_{3,4}^n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2,3}^{2n}$.

Soluzione:

1. La matrice delle probabilità di transizione tra gli stati della catena è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

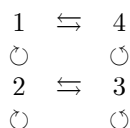
perciò la catena può essere rappresentata mediante il grafo diretto

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \leftrightarrow & 2 \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 3 & \leftrightarrow & 4
 \end{array}$$

da cui si deduce che esiste un'unica classe di stati comunicanti. Inoltre, partendo dallo stato 1 si ritorna su di esso sempre con un numero pari di passi e quindi il periodo della classe è 2. Le sottoclassi cicliche dell'unica classe di stati comunicanti corrispondono quindi alle classi di stati comunicati della matrice delle probabilità di transizione

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

il cui grafo diretto associato è



da cui segue che la catena di Markov descritta da P^2 è decomponibile e ha due classi di stati comunicanti aperiodiche $\{1, 4\}$ e $\{2, 3\}$.

2. Poiché la catena di Markov è omogenea

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X_5 = 2\} | \{X_2 = 3\}) &= \mathbb{P}(\{X_3 = 2\} | \{X_0 = 3\}) \\ &= P_{3,2}^3 = \sum_{i=1}^4 P_{3,i} P_{i,2}^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_2] &= \sum_{i,j=1}^4 j \mathbb{P}(\{X_2 = j\} | \{X_0 = i\}) \mathbb{P}\{X_0 = i\} = \\ &= \sum_{i,j=1}^4 \frac{1}{4} P_{i,j}^2 j = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 j = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato che, in questo caso, P^2 è bistocastica, cioè anche la somma sull'indice delle righe degli elementi di matrice di P^2 è pari a 1.

3. Poiché $\{2,3\}$ è una sottoclasse ciclica di periodo 2 di P considerando la catena di Markov indecomponibile e aperiodica costruita sugli stati 2 e 3 per mezzo degli elementi di matrice di P^2 che rappresentano le probabilità di transizione tra questi stati, ovvero considerando la catena di Markov definita dalla matrice delle probabilità di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{22}^2 & P_{23}^2 \\ P_{32}^2 & P_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

applicando il teorema ergodico a questa catena otteniamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2,3}^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{2,3}^n = \pi_3 = \frac{1}{2}$, dove $\pi := (\pi_2, \pi_3)$ è la distribuzione di probabilità invariante per Q , ovvero $\pi Q = \pi$.

D'altra parte, poiché $P_{1,2}^n$ e $P_{3,4}^n$ sono diverse da zero soltanto se n è dispari poiché 1 e 2, come 3 e 4 appartengono a sottoclassi cicliche distinte, $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{1,2}^n + P_{3,4}^n)$ non esiste. Le stesse

considerazioni valgono per $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 4\}$ visto che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 4\} &= \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(\{X_n(\omega) = 4\} | \{X_0(\omega) = i\}) \mathbb{P}\{X_0(\omega) = i\} \\ &= \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}\{X_0(\omega) = i\} P_{i,4}^n. \end{aligned}$$

■

Esercizio 4 Sia $\{E_i\}_{i \geq 1}$ una successione di eventi stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza di un parametro Θ , che si assume essere una v.a. la cui distribuzione di probabilità a priori è descritta dalla funzione di ripartizione (distribuzione)

$$F_{\Theta}(\theta) := \theta^3 \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta),$$

tale che $\mathbb{P}(E_i | \Theta) = \Theta$. Dopo le prime quattro osservazioni si registra che soltanto il primo evento non è accaduto.

1. Calcolare la densità di probabilità a posteriori di Θ .
2. Calcolare la probabilità a priori che $\Theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.
3. Calcolare la probabilità a posteriori che $\Theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.
4. Calcolare il valore massimo della densità di probabilità a posteriori di Θ .

Soluzione:

1. Consideriamo le vv.aa. $\xi_i := \mathbf{1}_{E_i}$, $i = 1, \dots, 4$. La densità a posteriori di Θ dato il vettore aleatorio $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ sarà

$$\begin{aligned} \pi_4(\Theta = \theta | E_1^c \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) &= \\ \pi_4(\Theta = \theta | \{\omega \in \Omega : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (0, 1, 1, 1)\}) &= \\ K \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (0, 1, 1, 1)\} | \Theta = \theta) \pi_0(\theta) &= \\ = K \mathbb{P}(E_1^c \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 | \Theta = \theta) \pi_0(\theta) &= \\ = K \mathbb{P}(E_1^c | \Theta = \theta) \mathbb{P}(E_2 | \Theta = \theta) \times &= \\ \times \mathbb{P}(E_3 | \Theta = \theta) \mathbb{P}(E_4 | \Theta = \theta) \pi_0(\theta) &= \\ K(1 - \mathbb{P}(E_1 | \Theta = \theta)) \mathbb{P}(E_2 | \Theta = \theta) \mathbb{P}(E_3 | \Theta = \theta) \times &= \\ \times \mathbb{P}(E_4 | \Theta = \theta) \pi_0(\theta) = K \theta^3 (1 - \theta) \pi_0(\theta) &= \\ = 3K \theta^3 (1 - \theta) & \end{aligned}$$

dove si è usato che $\pi_0(\theta) = \frac{d}{d\theta} F_{\Theta}(\theta) = 3\theta^2$. Poiché

$$\int_0^1 d\theta 3K \theta^3 (1 - \theta) = \frac{3}{5 \cdot 4} K = 1 \implies K = \frac{20}{3}.$$

2. La probabilità *a priori* che $\Theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ per definizione è

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 d\theta \pi_0(\theta) = F_{\Theta}(1) - F_{\Theta}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

3. La probabilità *a posteriori* che $\Theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ per definizione sarà

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 d\theta \pi_4(\Theta = \theta | E_1^c \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 d\theta 20\theta^3(1-\theta) \\ &= 20 \left(\frac{\theta^4}{4} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{\theta^5}{5} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) = 5 \left(1 - \frac{1}{16} \right) - 4 \left(1 - \frac{1}{32} \right) \\ &= \frac{150 - 124}{32} = \frac{13}{16}. \end{aligned}$$

4. Differenziando $\pi_4(\Theta = \theta | E_1^c \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = 20\theta^3(1-\theta)$ otteniamo

$$3\theta^2(1-\theta) - \theta^3 = 0$$

ovvero che il valore massimo della densità di probabilità a posteriori di Θ è raggiunto per $\theta = \frac{3}{4}$.

■