Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

a.a.2024/2025
29/01/2025

Esercizio 1 *Un comune ha 2500 lampioni ognuno dei quali ha una lampadina. I lampioni sono così disclocati: 600 nel centro storico 550 nella frazione Nord, 500 nella frazione Ovest, 450 nella frazione Sud e 400 nella frazione Est. La probabilità che durante la notte si rompa una lampadina in una frazione del comune è pari all'inverso del numero di lampioni presenti in quella stessa frazione indipendentemente dallo stato di usura delle lampadine e che ogni mattina vengano sostituite tutte le lampadine fulminatesi la notte precedente.*

1. *Calcolare la distribuzione di probabilità del numero di lampadine che si fulminano durante la notte.*
2. *Calcolare il valore atteso e la varianza del numero di lampadine fulminatesi durante la notte in un anno assumendo che la probabilità che si fulmini una lampadina nel comune sia pari al rapporto tra il valore atteso del numero di lampadine che si fulminano durante la notte ed il numero totale dei lampioni.*
3. *Sotto le ipotesi del punto precedente dare una stima del numero di lampadine che la società comunale di gestione dei lampioni deve acquistare perché la probabilità di usarle tutte in un anno sia al più il 5%.*

Soluzione:

1. Indichiamo con i numeri da 1 a 5 le zone del comune in modo tale che la zona 1 corrisponda al centro storico, la zona 2 corrisponda alla frazione Nord, la zona 3 corrisponda alla frazione Ovest, la zona 4 corrisponda alla frazione Sud e la zona 5 corrisponda alla frazione Est. Sia $X_{i,j}, i = 1, ..5; j = 1, .., N_i$ la variabile aleatoria che vale 1 se durante la notte si è fulminata la lampadina j-sima della zona i-sima. Allora, per ogni $i = 1, .., 5, Y_i := \sum_{j=1}^{N_i} X_{i,j}$ è una v.a. con distribuzione di probabilità $Bin(n, p)$ di parametri $n = N_i$ e $p = \frac{1}{N_i}$. Pertanto, la distribuzione di probabilità del numero di lampadine che si fulminano durante la notte Y sarà

$$\mathbb{P}\{Y = k\} := \sum_{l_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{l_5=0}^{N_5} \delta_{\sum_{i=1}^{5} l_i, k} \prod_{i=1}^{5} \binom{N_i}{l_i} \left(\frac{1}{N_i}\right)^{l_i} \left(1 - \frac{1}{N_i}\right)^{N_i - l_i}, \ 0 \leq k \leq N$$

   con $N = \sum_{i=1}^{5} N_i$.

2. Ponendo
$$p = \frac{\mathbb{E}[Y]}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}[Y_i]}{N} = \sum_{i=1}^{5} \frac{N_i \frac{1}{N_i}}{N} = \frac{5}{N} \ ,$$
la v.a. che indica il numero di lampadine fulminatesi in una notte ha distribuzione $Bin(N,p)$, infatti
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y=k\} \quad &: \quad = \sum_{l_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{l_5=0}^{N_5} \delta_{\sum_{i=1}^{5} l_i, k} \prod_{i=1}^{5} \binom{N_i}{l_i} p^{l_i} (1-p)^{N_i - l_i} \\ &= \quad p^k (1-p)^{N-k} \sum_{l_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{l_5=0}^{N_5} \delta_{\sum_{i=1}^{5} l_i, k} \delta_{\sum_{i=1}^{5} l_i, k} \prod_{i=1}^{5} \binom{N_i}{l_i} \\ &= \quad \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \ , \ 0 \leq k \leq N \ . \end{aligned}$$
La v.a. che indica il numero di lampadine fulminatesi in un anno $Z = \sum_{k=1}^{M} Y_k$, dove $M = 365$ e $Y_k \stackrel{d}{=} Y$. Poiché le Y_k sono i.i.d. $\mathbb{E}[Z] = M\mathbb{E}[Y] = MNp$ e $Var[Z] = MVar[Y] = MNp(1-p)$.

3. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che
$$\mathbb{P}\{Z > k\} \leq 0,05 \ .$$
Poiché
$$\mathbb{P}\{Z > k\} = \mathbb{P}\left\{ \frac{Z - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{Var[Z]}} > \frac{k - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{Var[Z]}} \right\}$$
facendo uso dell'approssimazione gaussiana, posto $x = \frac{k - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{Var[Z]}}$ si ha
$$\mathbb{P}\left\{ \frac{Z - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{Var[Z]}} > \frac{k - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{Var[Z]}} \right\} = 1 - \operatorname{erf}(x) \leq 0,05 \ ,$$
cioè $\operatorname{erf}(x) \geq 0,95$, da cui $k \geq \mathbb{E}[Z] + \operatorname{erf}^{-1}(0,95) \sqrt{Var[Z]}$.

■

Esercizio 2 *Sia (X,Y) un vettore aleatorio uniformemente distribuito sull'insieme*
$$D := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y - x| \leq 1, y \leq 1 - x^2 \right\} \ .$$

1. *Calcolare la costante di normalizzazione della densità di probabilità congiunta.*
2. *Verificare se le componenti del vettore sono indipendenti e in caso contrario calcolare la densità della probabilità condizionata della componente Y rispetto alla componente X.*
3. *Calcolare la matrice di covarianza di (X,Y), ovvero*
$$\begin{pmatrix} Cov(X,X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Cov(Y,Y) \end{pmatrix} \ .$$

Soluzione:

1. Poiché $1-x^2 = x-1$ per $x=1$ e $x=-2$, l'area di D è pari a

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} dx \int_{x-1}^{1-x^2} dy + 2 + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x^2} dy &= 2 + \left(\int_{-2}^{-1} dx + \int_0^1 dx\right)\left(2 - x - x^2\right) \\ &= 2 + 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{8}{3}\right) + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= 7 - \frac{8}{3} = \frac{13}{3}\end{aligned}$$

   Perciò la costante di normalizzazione della distribuzione di probabilità congiunta del vettore aleatorio (X,Y) è pari a $K := \frac{3}{13}$.

2. Le densità di probabilità marginali di (X,Y) sono

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{3}{13}\left\{\left[\mathbf{1}_{[-2,-1)}(x) + \mathbf{1}_{(0,1]}(x)\right]\left(2 - x - x^2\right) + 2\mathbf{1}_{[-1,0]}(x)\right\} \\ &= \frac{3}{13}\left\{2\mathbf{1}_{[-2,1)}(x) - \left[\mathbf{1}_{[-2,-1)}(x) + \mathbf{1}_{(0,1]}(x)\right]\left(x^2 + x\right)\right\} \\ f_Y(y) &= \frac{3}{13}\left\{\mathbf{1}_{[-3,-0]}(x)\left(\sqrt{1-y} + y + 1\right) + \mathbf{1}_{(0,1]}(y)\left(\sqrt{1-y} - y + 1\right)\right\}\end{aligned}$$

   Da cui segie che le vv.aa. X e Y non sono tra loro stocasticamente indipendenti. Infatti, scegliendo per esempio il punto $(0,0)$ si ottiene

$$f_X(0) f_Y(0) = 0 \neq f_{(X,Y)}(0,0) = \frac{3}{13}\ .$$

   Allora,

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\mathbf{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y-x|\leq 1, y\leq 1-x^2\}}(x,y)}{\left[\mathbf{1}_{[-2,-1)}(x) + \mathbf{1}_{(0,1]}(x)\right]\left(2 - x - x^2\right) + 2\mathbf{1}_{[-1,0]}(x)} \\ &= \frac{\mathbf{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y-x|\leq 1, y\leq 1-x^2\}}(x,y)}{2 - \left[\mathbf{1}_{[-2,-1)}(x) + \mathbf{1}_{(0,1]}(x)\right]\left(x^2 + x\right)} \\ &= \frac{\mathbf{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y-x|\leq 1, y\leq 1-x^2\}}(x,y)}{2 - \left(x^2 + x\right)}\mathbf{1}_{[-2,-1]\cup[0,1]}(x) + \\ &\quad + \frac{\mathbf{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y-x|\leq 1, y\leq 1-x^2\}}(x,y)}{2}\mathbf{1}_{[-1,0]}(x)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{3}{13}\int_{\mathbb{R}} dx f_X(x)\, x = -\frac{1}{2}\ , \\ \mathbb{E}\left[X^2\right] &= \frac{3}{13}\int_{\mathbb{R}} dx f_X(x)\, x = \frac{3}{13}\left(\frac{31}{10}\right)\ .\end{aligned}$$

Poiché integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int dyy\sqrt{1-y} &= -\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}y+\frac{2}{3}\int dy(1-y)^{\frac{3}{2}}= \\ &= -\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}y-\frac{2}{3}\int d(1-y)(1-y)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{2}{3}\left[(1-y)^{\frac{3}{2}}y+\frac{2}{5}(1-y)^{\frac{5}{2}}\right]+cost\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int dyy^2\sqrt{1-y} &= -\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}y^2+\frac{4}{3}\int dyy(1-y)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{2}{3}\left\{(1-y)^{\frac{3}{2}}y^2+\frac{4}{3}\left[(1-y)^{\frac{3}{2}}y+\frac{2}{5}(1-y)^{\frac{5}{2}}\right]\right\}+cost\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \int_{\mathbb{R}}dyf_Y(y)y=\frac{3}{13}\frac{375}{15}, \\ \mathbb{E}\left[Y^2\right] &= \int_{\mathbb{R}}dyf_Y(y)y^2=\frac{3}{13}\times \\ &\quad\times\left\{\left[\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}-\frac{2}{3}\left\{(1-y)^{\frac{3}{2}}y^2+\frac{2}{3}\left[(1-y)^{\frac{3}{2}}y+\frac{2}{5}(1-y)^{\frac{5}{2}}\right]\right\}\right]_{-3}^{0}+\right. \\ &\quad\left.+\left[-\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}-\frac{2}{3}\left\{(1-y)^{\frac{3}{2}}y^2+\frac{2}{3}\left[(1-y)^{\frac{3}{2}}y+\frac{2}{5}(1-y)^{\frac{5}{2}}\right]\right\}\right]_{0}^{1}\right\} \\ &= \ldots.\end{aligned}$$

Inoltre, allo stesso modo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \frac{3}{13}\int_D dxdyxy=\frac{3}{13}\left\{\left[\int_{-2}^{-1}dx+\int_0^1 dx\right]x\int_{x-1}^{1-x^2}dyy+\int_{-1}^{0}dxx\int_{x-1}^{x+1}dyy\right\}= \\ &= \frac{3}{13}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}dx+\int_0^1 dx\right]\left(x^5-3x^3+2x^2\right)+\int_{-1}^{0}dx4x^2\right\} \\ &= \frac{3}{13}\left\{\left[\frac{1}{12}x^6-\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{12}x^6-\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\frac{4}{3}\right\} \\ &= \frac{3}{13}\left\{\frac{1-2^5}{6}+\frac{3\cdot 7}{4}+\frac{12}{3}\right\}=\ldots.\end{aligned}$$

■

Esercizio 3 *Consideriamo un esperimento in cui una cavia è posta in un ambiente costituito da* 5 *stanze tali che la stanza numero* 1 *comunica con le atre quattro stanze, la stanza numero* 2 *comunica anche con le stanze* 3 *e* 4*, e le stanze numero* 3 *e* 4 *comunicano anche con la stanza* 5*. Supponiamo*

di osservare che ad ogni istante di tempo $n \in \mathbb{N}$ la cavia cambi stanza e che ciò avvenga con una probabilità che cresce al crescere della dimensione delle aperture tra le stanze. Sia $\{X_n\}_{n\geq 0}$ la successione di vv.aa. che indicano la posizione della cavia al tempo n, ovvero il numero della stanza in cui si trova la cavia:

1. *dimostrare che $\{X_n\}_{n\geq 0}$ è una catena di Markov e scrivere la matrice di probabilità di transizione tra gli stati della catena;*

2. *supponendo che le aperture tra la stanza 1 e le altre stanze siano tutte uguali tra loro mentre quelle tra le stanze diverse dalla prima siano il doppio di queste, elencare le classi di equivalenza degli stati della catena e calcolarne il periodo;*

3. *sotto le stesse ipotesi del punto precedente calcolare se esistono $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_{2n+1}(\omega) = 4\}$ e $\lim_{n\to\infty} \left(P^n_{3,2} + P^n_{3,4}\right)$.*

Soluzione:

1. Il numero corrispondente alla stanza in cui si troverà la cavia all'istante $n+1, X_n$ dipende esclusivamente da quello che indica la posizione della cavia all'istante precedente, perciò la successione di vv.aa. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ descrive una catena di Markov il cui spazio degli stati $S = \{1, .., 5\}$ e la matrice di transizione di probabilità è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} & p_{1,5} \\ p_{1,2} & 0 & p_{2,3} & 0 & p_{2,5} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & 0 & p_{3,4} & 0 \\ p_{1,4} & 0 & p_{3,4} & 0 & p_{4,5} \\ p_{1,5} & p_{2,5} & 0 & p_{4,5} & 0 \end{pmatrix}$$

   dove abbiamo usato che poiché la probabilitò di passare da una stanza all'altra dipende esclusivamente dall'ampiezza dell'apertura tra le stanze, $p_{i,j} = p_{j,i}, \forall i, j = 1, .., 5$. Perciò la matrice è simmetrica e bistocastica, ovvero $1 = \sum_{i=1}^5 p_{j,i} = \sum_{i=1}^5 p_{i,j}$.

2. Supponiamo che la taglia dell'apertura tra la stanza 1 e le altre sia uguale ad $a > 0$. Allora, $\forall j = 2, .., 5\ p_{1,j} = p_{1,j}(a)$ e $p_{1,j}(a) = p_{1,k}(a), \forall j, k = 2, .., 5$. Ovvero, indipendentemente dal valore di $j \neq 1, p_{1,j}(a) = p(a)$. Inoltre, poiché

$$1 = \sum_{j=1}^5 p_{1,j}(a) = \sum_{j=2}^5 p(a) = 4p(a) \ ,$$

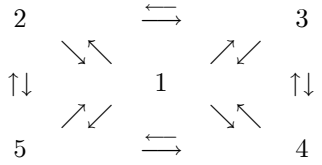
   perciò $p(a) = \frac{1}{4}$. Allo stesso modo, poiché $\forall i \neq 1, p_{i,j} = p_{i,j}(2a)$ e indipendentemente dal valore di $i, j \neq 1, p_{i,j}(2a) = p(2a), \forall i \neq 1$ otteniamo

$$1 = \sum_{j=1}^5 p_{i,j}(a) = p_{i,1}(a) + \sum_{j=2}^5 p_{i,j}(2a) = p(a) + 2p(2a) \ ,$$

perciò $2p\,(2a) = \frac{3}{4}$ ovvero $p\,(2a) = \frac{3}{8}$. Dunque,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix} .$$

La catena



ha un'unica classe di stati comunicanti aperiodica, pertanto vale il teorema ergodico.

3. Poiché P è bistocastica π è anche un autovettore destro corrispondente all'autovalore 1, ma per l'unicità della distribuzione invariante, poiché $(1, .., 1)$ è un autovettore destro corrispondente all'autovalore $1, \exists c > 0$ tale che $\forall i = 1, .., 5, \pi_i = c1$, ma $\sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$, perciò $c = \frac{1}{5}$ e la distribuzione invariante è la distribuzione uniforme su S.

   Pertanto, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : X_{2n+1}\left(\omega\right) = 4\right\}$ esiste e indipendentemente dalla distribuzione iniziale della catena vale $\frac{1}{5}$. le stese considerazioni valgono per $\lim_{n\to\infty}\left(P^n_{3,2} + P^n_{3,4}\right) = \lim_{n\to\infty} P^n_{3,2} + \lim_{n\to\infty} P^n_{3,4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

■

Esercizio 4 *Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di vv.aa. stocasticamente indipendenti, subordinatamente alla conoscenza di un parametro Θ, con densità di probabilità condizionata marginale*

$$f\left(x_i|\theta\right) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\theta}{2} x_i^2\right\} \ , \ x_i \in \mathbb{R} \ .$$

Supponendo che la densità a priori di Θ sia un esponenziale di parametro 2, se si osservano i primi valori $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 1$, della successione,

1. *Calcolare la densità di probabilità a posteriori di Θ e il suo punto di massimo.*
2. *Calcolare la probabilità a posteriori dell'evento $\{\Theta \leq 3\}$.*
3. *Calcolare valore atteso e varianza a posteriori della v.a. $Z = \Theta^{-1}$.*

Soluzione:

1. La densità a posteriori di Θ sarà pari a

$$\begin{aligned} &\pi\left(\Theta = \theta|\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = (1, 2, 1, 1)\right) = \\ &= K f_\Theta\left(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 1\right) \pi_\Theta\left(\theta\right) \\ &= K f\left(x_1 = 1|\theta\right) f\left(x_2 = 2|\theta\right) f\left(x_3 = 1|\theta\right) f\left(x_4 = 1|\theta\right) e^{-2\theta} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\left(\theta\right) \\ &= \frac{K}{\left(2\pi\right)^2} \theta^2 e^{-\theta\left[\frac{(1+4+1+1)}{2}+2\right]} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\left(\theta\right) = \frac{K}{\left(2\pi\right)^2} \theta^2 e^{-\theta\frac{11}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\left(\theta\right) \ , \end{aligned}$$

e quindi è una $\Gamma\left(3, \frac{11}{2}\right) = \Gamma\left(3, 5 + \frac{1}{2}\right)$. Perciò $K = (2\pi)^2 \left(\frac{11}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \pi^2 \frac{(11)^3}{2^2}$.
Il punto di massimo si ha per $\theta = \frac{4}{11}$.

2. Ponendo $\lambda = \frac{11}{2}$, integrando due volte per parti, la probabilità a posteriori dell'evento $\{\Theta \leq 3\}$ risulta allora pari a

$$\frac{\lambda}{2}^3 \int_0^3 d\theta \theta^2 e^{-\theta\lambda} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(9\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) e^{-3\lambda}\right] .$$

3. Il valore atteso a posteriori di $\frac{1}{\Theta}$ è pari a

$$\frac{\lambda^3}{2} \int_0^{+\infty} d\theta \theta e^{-\theta\lambda} = \frac{\lambda}{2} ;$$

il valore atteso a posteriori di $\frac{1}{\Theta^2}$ è pari a

$$\frac{\lambda^3}{2} \int_0^{+\infty} d\theta e^{-\theta\lambda} = \frac{\lambda^2}{2} .$$

Perciò la varianza a posteriori di Θ è uguale a $\frac{\lambda^2}{4}$.

■