Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

a.a.2023/2024
31/02/2024

Esercizio 1 *Si considerino 4 giocatori ognuno dei quali riceve 13 carte da un mazzo di 52 (carte francesi), servendo prima il primo giocatore, poi il secondo e così via.*

1. *Calcolare la probabilità che il primo giocatore riceva 2 assi e un K, il secondo e il terzo giocatore un asso ciascuno.*
2. *Cosa cambia se si servono i giocatori distribuendo ogni volta una carta ciascuno fino ad esaurire il mazzo?*

Soluzione:

1. La probabilità dell'evento indicato è pari al rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quelli possibili.

   Il numero di modi in cui si può servire il primo giocatore, poiché l'ordine con cui compaiono le carte che gli vengono servite non conta è dato dal numero di modi in cui si può estrarre un campione non ordinato di 13 elementi da un insieme di 52 senza reimbussolamento e pertanto è pari a $\binom{52}{13}$. Analogamente, il numero modi in cui si può servire il secondo giocatore è $\binom{39}{13}$, quello in cui si può servire il terzo giocatore è $\binom{26}{13}$, mentre al quarto giocatore toccheranno le 13 carte rimaste nel mazzo indipendentemente dall'ordine in cui si trovano. Perciò il numero di modi in cui possono essere serviti i quattro giocatori è pari a

$$\begin{aligned} |\{\text{casi possibili}\}| &= \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13} \\ &= \frac{52!}{39!13!}\frac{39!}{26!13!}\frac{26!}{13!13!} = \frac{52!}{(13!)^4}\ . \end{aligned}$$

   Allo stesso modo, poiché in un siffatto mazzo di carte ci sono quattro assi, il numero di modi in cui si possono servire due assi al primo giocatore è $\binom{4}{2} = 6$, mentre il numero di modi in cui si può servire un K al primo giocatore è $\binom{4}{1} = 4$. Una volta serviti i due assi e il K, nel mazzo saranno presenti $52 - 3 = 49$ carte di cui $52 - 8 = 44$ che non contengono né assi né

K. Perciò, il numero di modi in cui si possono servire le restanti 10 carte al primo giocatore senza assi né K sarà pari al numero di modi in cui si può estrarre da queste un campione non ordinato di 10 carte, cioè $\begin{pmatrix} 44 \\ 10 \end{pmatrix}$. Il mazzo di carte da cui estrarre quelle da servire al secondo giocatore ne conta 39 e tra queste ci sono 2 assi; quindi si può servire al secondo giocatore un asso in $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$ modi e le restanti 12 carte da un mazzo di 37 carte tra le 38 rimanenti dopo aver servito l'asso, ovvero in $\begin{pmatrix} 37 \\ 12 \end{pmatrix}$ modi. Dopo aver servito 13 carte tra cui un asso al secondo giocatore, il mazzo consterà di 26 carte tra cui un solo asso, che gli potrà essere servito al terzo giocatore in un unico modo, mentre le rimanenti 12 carte gli potranno essere servite in $\begin{pmatrix} 25 \\ 12 \end{pmatrix}$ modi. Pertanto, il numero di modi in cui si possono servire due assi e un K al primo giocatore e un asso ciasuno al secondo e terzo giocatore, ovvero il numero di casi favorevoli, sarà

$$\begin{aligned} |\{\text{casi favorevoli}\}| &= 6 \cdot 4 \cdot \begin{pmatrix} 44 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 37 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 12 \end{pmatrix} \\ &= 48 \cdot \frac{44!}{34!10!} \cdot \frac{37!}{25!12!} \cdot \frac{25!}{13!12!} \end{aligned}$$

e la probabilità dell'evento cercato sarà

$$\begin{aligned} \frac{|\{\text{casi favorevoli}\}|}{|\{\text{casi possibili}\}|} &= \frac{48 \cdot 44! \cdot 37! \cdot (13!)^3}{52! \cdot 34! \cdot (12!)^2 \cdot 10!} \\ &= \frac{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 12 \cdot 11 \cdot (13)^3}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45} \ . \end{aligned}$$

2. Servendo un giocatore alla volta, il primo giocatore potra ricevere la prima tra le 52 disponibili, il secondo giocatore una tra le 51 disponibili, il terzo riceverà una tra le 50 disponibili e il quarto una tra le 49 rimaste. Al secodo turno di distribuzione delle carte, il primo giocatore riceverà una tra le $48 = 52 - 4$ carte disponibili, il secondo una tra le $47 = 51 - 4$ carte rimaste e così via. Perciò, l'insieme M_1 di tutte le possibili *mani* di 13 carte che il primo giocatore può ricevere è pari al rapporto tra $\prod_{k=0}^{12} (52 - 12k)$ e 13!, ovvero

   $$M_1 = \frac{\prod_{k=0}^{12} (52 - 12k)}{13!} \ .$$

   Analogamente per gli altri giocatori si avrà

   $$M_j = \frac{\prod_{k=0}^{12} (52 - (j-1) - 12k)}{13!} \ , \ j = 2, 3, 4 \ .$$

Perciò,

$$|\{\text{casi favorevoli}\}| = \prod_{j=1}^{4} \frac{\prod_{k=0}^{12} (52-(j-1)-12k)}{13!} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

come nel caso precedente. Poiché anche il computo dei casi favorevoli resta invariato, se ne deduce che il modo con cui vengono distribuite le carte non cambia la probabilità dell'evento indicato.

■

Esercizio 2 *Siano X e Y due vv.aa. indipendenti identicamente distribuite di densità di probabilità*

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x) := Cx^4 \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Calcolare:

1. *C e la funzione di ripartizione congiunta delle componenti del vettore aleatorio (X,Y);*
2. *La matrice di covarianza del vettore aleatorio (X,Y,Z), ovvero*

$$\begin{pmatrix} Cov(X,X) & Cov(X,Y) & Cov(X,Z) \\ Cov(Y,X) & Cov(Y,Y) & Cov(Y,Z) \\ Cov(Z,X) & Cov(Z,Y) & Cov(Z,Z) \end{pmatrix} ,$$

dove $Z := \sqrt{X}$.

Soluzione:

1.
$$1 = C\int_0^1 dx x^4 = \frac{C}{5} \Longrightarrow C = 5 \ .$$

Poiché X e Y sono vv.aa. indipendenti $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$ e poiché $X \overset{d}{=} Y, F_Y(y) = F_X(y)$; perciò, siccome

$$\begin{aligned} F_X(x) &= x^5 \mathbf{1}_{(0,1]}(x) + \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(x) \ , \\ F_{(X,Y)}(x,y) &= \left(x^5 \mathbf{1}_{(0,1]}(x) + \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(x)\right)\left(y^5 \mathbf{1}_{(0,1]}(y) + \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(y)\right) \end{aligned}$$

2. Poiché, X è stocasticamente indipendente da Y lo è anche Z, perciò $Cov(X,Y) = Cov(Y,Z) = 0$. Ciò implica che sono nulle anche $Cov(Y,X)$ e $Cov(Z,Y)$ perché la covarianza di due vv.aa. è una funzione simmetrica rispetto allo scambio di queste. Inoltre, poiché $X \overset{d}{=} Y, Cov(X,X) = Var(X) = Var(Y) = Cov(Y,Y)$. Pertanto resta da calcolare $Var(X), Cov(X,Z)$ e $Var(Z)$. Siccome

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 5\int_0^1 dx x^5 = \frac{5}{6} \ , \ \mathbb{E}\left[X^2\right] = 5\int_0^1 dx x^6 = \frac{5}{7} \ , \\ \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[\sqrt{X}\right] = 5\int_0^1 dx x^{4+\frac{1}{2}} = 5\int_0^1 dx x^{\frac{9}{2}} = \frac{10}{11} \ , \\ \mathbb{E}[ZX] &= \mathbb{E}\left[X\sqrt{X}\right] = 5\int_0^1 dx x^{4+\frac{3}{2}} = \frac{10}{13} \end{aligned}$$

e $\mathbb{E}\left[Z^2\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$, si ha

$$\begin{aligned}
Var\left(X\right) &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2 = \frac{5}{7} - \frac{25}{36} = \frac{5}{7 \cdot 3^2 \cdot 2^2} \ , \\
Var\left(Z\right) &= \frac{5}{6} - \left(\frac{10}{11}\right)^2 = \frac{5 \cdot \left(11^2 - 2^3 \cdot 3\right)}{11^2 \cdot 3 \cdot 2} \ , \\
Cov\left(X, Z\right) &= \mathbb{E}\left[XZ\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Z\right] = \frac{10}{13} - \frac{5^2}{3 \cdot 11} \\
&= \frac{5 \cdot \left(2 \cdot 3 \cdot 11 - 5 \cdot 13\right)}{3 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{5}{3 \cdot 11 \cdot 13} \ .
\end{aligned}$$

■

Esercizio 3 *Supponiamo di avere una successione di vv.aa.* $\left\{X_n\right\}_{n \geq 0}$ *sullo spazio di probabilità* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ *che descrive una catena di Markov con 4 stati,* $S = \left\{1, 2, 3, 4\right\}$ *tale che: dallo stato* 1 *si transisce con probabilità* $\frac{1}{2}$ *agli stati* $1, 2$. *Dallo stato* 2, *si transisce con probabilità* $\frac{1}{2}$ *agli stati* $1, 3$. *Dallo stato* 3 *si transisce con probabilità* $\frac{1}{2}$ *agli stati* $2, 4$. *Dallo stato* 4 *si transisce con probabilità* $\frac{1}{2}$ *agli stati* $3, 4$.

1. *Elencare le classi di equivalenza degli stati e calcolarne il periodo.*
2. *Ci sono stati assorbenti?*
3. *Se* $\left\{P_{i,j}\right\}_{i,j=1,..,4}$ *indica la matrice delle probabilità di transizione tra gli stati della catena, calcolare se esistono:* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : X_n\left(\omega\right) = 4\right\}, \lim_{n\to\infty}\left(\left(P^n\right)_{1,2} + \left(P^n\right)_{3,4}\right), \lim_{n\to\infty}\left(P^{2n}\right)_{2,3}$.

Soluzione:

1. Poiché la catena è omogenea possiamo rappresentarla mediante il grafo diretto

$$\circlearrowright \quad 1 \quad \overset{\curvearrowleft}{\rightarrow} \quad 2 \quad \overset{\curvearrowleft}{\rightarrow} \quad 3 \quad \overset{\curvearrowleft}{\rightarrow} \quad 4 \quad \circlearrowleft$$

cui è associata la matrice di transizione di probabilità

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gli stati della catena costituiscono un unica classe di stati comunicanti. Questa è anche aperiodica poiché la probabilità di restare nello stato 1 partendo da questo è positiva.

2. Non ci sono stati assorbenti poiché $\forall i \in S, P_{i,i} < 1$.

3. Per quanto esposto al punto 1. vale il teorema ergodico per le catene di Markov a stati finiti perciò $\forall i, j \in S, \lim_{n\to\infty}\left(P^n\right)_{i,j} = \pi_j$ dove $\left(\pi_1, .., \pi_4\right)$ è la distribuzione di probabilità stazionaria ovvero tale che $\forall j \in S, \sum_{i\in S} \pi_i P_{i,j} = \pi_j$.Poiché in questo caso P è simmetrica

e siccome per definizione P è stocastica, ovvero $i \in S, \sum_{j\in S} P_{i,j} = 1$, si ottiene subito che l'unica soluzione del sistema di 5 equazioni algebriche in 4 incognite

$$\begin{cases} \sum_{i\in S} \pi_i P_{i,j} = \pi_j \ , \ j = 1,2,3,4 \\ \sum_{i\in S} \pi_i = 1 \end{cases}$$

è $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{4}$.

Perciò, in questo caso,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = 4\} &= \lim_{n\to\infty} \left(P^{2n}\right)_{2,3} = \lim_{n\to\infty} (P^n)_{1,2} \\ &= \lim_{n\to\infty} (P^n)_{3,4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

e $\lim_{n\to\infty} \Big((P^n)_{1,2} + (P^n)_{3,4}\Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

■

Esercizio 4 *Sia* $\{E_i\}_{i\geq 1}$ *una successione di eventi stocasticamenti indipendenti subordinatamente alla conoscenza di un parametro* Θ, *che si assume essere una v.a. la cui distribuzione di probabilità a priori è descritta dalla funzione di ripartizione (distribuzione)*

$$F_\Theta(\theta) := C\mathbf{1}_{[0,1]}(\theta) \int_{-\infty}^{\theta} dy y (1-y) + \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(\theta) \ \ ,$$

tale che $\mathbb{P}(E_i|\Theta) = \Theta$. *Dopo le prime quatto osservazioni si registra che il primo ed il secondo evento sono accaduti, mentre il terzo ed il quarto evento non sono stati osservati.*

Calcolare la densità di probabilità a posteriori di Θ *e il valore dello stimatore di massima verosimiglianza per il campione di eventi* $\{E_1, .., E_4\}$.

Soluzione: Consideriamo le vv.aa. $\xi_i := \mathbf{1}_{E_i}, i = 1, .., 4$. La densità a posteriori di Θ dato il vettore aleatorio $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ sarà

$$\begin{gathered} \pi_4\left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c\right) = \\ \pi_4\left(\Theta = \theta | \{\omega \in \Omega : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (1,1,0,0)\}\right) = \\ K\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (1,1,0,0)\} | \Theta = \theta\right) \pi_0(\theta) \\ = K\mathbb{P}\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c | \Theta = \theta\right) \pi_0(\theta) \\ = K\mathbb{P}(E_1|\Theta = \theta)\, \mathbb{P}(E_2|\Theta = \theta) \times \\ \times \mathbb{P}(E_3^c|\Theta = \theta)\, \mathbb{P}(E_4^c|\Theta = \theta)\, \pi_0(\theta) = \\ K\mathbb{P}(E_1|\Theta = \theta)\, \mathbb{P}(E_2|\Theta = \theta)\, (1 - \mathbb{P}(E_3|\Theta = \theta)) \times \\ \times (1 - \mathbb{P}(E_4|\Theta = \theta))\, \pi_0(\theta) = K\theta^2 (1-\theta)^2 \pi_0(\theta) \\ = \frac{7}{36}\theta^3 (1-\theta)^3 \end{gathered}$$

dove:

1. nel terzultimo passaggio si è usato che gli eventi $E_i, i \geq 1$, sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza di Θ;

2.

$$\pi_0(\theta) := \frac{d}{d\theta} F_\Theta(\theta) = \theta(1-\theta) C \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta)$$

con C tale che

$$\begin{aligned} 1 &= C F_\Theta(1) = C \int_0^1 dy y (1-y) \\ &= C \frac{\Gamma^2(2)}{\Gamma(4)} = \frac{C}{3!} \Longrightarrow C = 6 \ ; \end{aligned}$$

3. K è tale che

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} d\theta \pi_4 \left(\Theta = \theta | E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\theta K \theta^2 (1-\theta)^2 \pi_0(\theta) \\ &= 6K \int_0^1 d\theta \theta^3 (1-\theta)^3 \Longrightarrow K = \frac{7}{36} \end{aligned}$$

Poiché la funzione $[0,1] \ni x \rightarrow x(1-x) \in [0,1]$ è simmetrica rispetto al punto $x = \frac{1}{2}$, lo stesso vale per la verosimiglianza

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, x_4 | \Theta = \theta) &= \theta^{\sum_{i=1}^4 x_i} (1-\theta)^{4-\sum_{i=1}^4 x_i} \\ &= \theta^2 (1-\theta)^2 \end{aligned}$$

del campione $\{\xi_1 = x_1, .., \xi_4 = x_4\}$ dove $x_1 = x_2 = 1$ e $x_3 = x_4 = 0$. $\blacksquare$