Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2016/2017
01/03/2017

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{aligned} X(t,X_0) &= X_0+\int_0^t dse^{-2s}X(s)+\int_0^t 2sdB(s) \ , \\ dX(t) &= e^{-2t}X(t)\,dt+2tdB(t) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0=0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t)\ ,\ t\geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(X(2,X_0),X(1,X_0))$.

Soluzione:

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$Y(t)=f(t,X(t)):=e^{-\int_0^t dse^{-2s}}X(t) \tag{2}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} df(t,X(t)) = &\left[(\partial_t f)(t,X(t))+(\partial_x f)(t,X(t))\,e^{-2t}X(t)+\frac{1}{2}4t^2\left(\partial_x^2 f\right)(t,X(t))\right]dt \\ &+2t(\partial_x f)(t,X(t))\,dB(t) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Ovvero, poiché $f(t,x)=xe^{-\int_0^t dse^{-2s}}$, e

$$\partial_t f(t,x)=-e^{-2t}f(t,x) \ , \tag{4}$$

$$\partial_x f(t,x)=\frac{f(t,x)}{x} \ , \tag{5}$$

$$\partial_x^2 f(t,x)=0 \ , \tag{6}$$

si ha

$$dY(t)=2te^{-\int_0^t dse^{-2s}}dB(t) \tag{7}$$

ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + 2\int_0^t s e^{-\int_0^s d\tau e^{-2\tau}} dB(s) \ , \tag{8}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= e^{\int_0^t ds e^{-2s}} Y(t, X_0) \qquad (9)\\ &= e^{\int_0^t ds e^{-2s}} \left[X_0 + 2\int_0^t s e^{-\int_0^s d\tau e^{-2\tau}} dB(s)\right] \\ &= e^{\frac{\left(1-e^{-2t}\right)}{2}} \left[X_0 + 2\int_0^t s e^{\frac{\left(e^{-2s}-1\right)}{2}} dB(s)\right] . \end{aligned}$$

2. Ponendo $X_0 = 0$, si ha

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = 2e^{\frac{\left(1-e^{-2t}\right)}{2}} \mathbb{E}\int_0^t s e^{\frac{\left(e^{-2s}-1\right)}{2}} dB(s) = 0 \ . \tag{10}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov[X(t, X_0), X(s, X_0)] &= \mathbb{E}[X(t, X_0) X(s, X_0)] \qquad (11)\\ &= 4e^{\left(1-\frac{e^{-2t}+e^{-2s}}{2}\right)} \int_0^{t\wedge s} d\tau \tau^2 e^{\left(e^{-2\tau}-1\right)} \\ &= 4e^{-\left(e^{-2t}+e^{-2s}\right)} \int_0^{t\wedge s} d\tau \tau^2 e^{e^{-2\tau}} \ . \end{aligned}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y \ &: = (X(2, X_0), X(1, X_0)) \qquad (12)\\ &= \left(2e^{\frac{\left(1-e^{-4}\right)}{2}} \int_0^2 t e^{\frac{\left(e^{-2t}-1\right)}{2}} dB(t), 2e^{\frac{\left(1-e^{-2}\right)}{2}} \int_0^1 t e^{\frac{\left(e^{-2t}-1\right)}{2}} dB(t)\right) \end{aligned}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri $\mu = (0, 0)$ e matrice di varianza-covarianza

$$\begin{aligned} C \ &: = \begin{pmatrix} 4e^{-2e^{-4}} \int_0^2 dt t^2 e^{e^{-2t}} & 4e^{-\left(e^{-4}+e^{-2}\right)} \int_0^1 dt t^2 e^{e^{-2t}} \\ 4e^{-\left(e^{-4}+e^{-2}\right)} \int_0^1 dt t^2 e^{e^{-2t}} & 4e^{-2e^{-2}} \int_0^1 dt t^2 e^{e^{-2t}} \end{pmatrix} \qquad (13)\\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} . \qquad (14) \end{aligned}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \ &: = \mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda, Y\rangle}\right] = e^{-\frac{1}{2}\langle C\lambda, \lambda\rangle} \qquad (15)\\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2\right)\right] \end{aligned}$$

■