Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2019/2020
01/09/2020

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds s X(s) + \int_0^t X(s) dB(s) \ , \tag{1}$$

$$dX(t) = tX(t) dt + X(t) dB(t) \ .$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 1$.
2. *Calcolare la varianza di* $(X(t, X_0) \ , \ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(\log X(1,1), \log X(2,1))$.

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.
   Ponendo
   $$Y(t) = f(t, X(t)) := \log \frac{X(t)}{X_0} \tag{2}$$
   e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t,x) = \log \frac{x}{X_0}$, e
   $$\partial_t f(t,x) = 0 \ , \tag{3}$$
   $$\partial_x f(t,x) = \frac{X_0}{x} \ , \tag{4}$$
   $$\partial_x^2 f(t,x) = -\frac{X_0}{x^2} \ , \tag{5}$$
   si ha
   $$dY(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right) dt + dB(t) \ , \tag{6}$$
   $$Y(t) = \int_0^t ds \left(s - \frac{1}{2}\right) + \int_0^t dB(s) \tag{7}$$
   $$= \frac{t}{2}(t-1) + B(t) \ . \tag{8}$$

Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,

$$X(t, X_0) = X_0 e^{\frac{t}{2}(t-1)+B(t)} \ . \tag{9}$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = 1 + \mathbb{E}\int_0^t sX(s)\,ds \ , \tag{10}$$

ovvero $\mu_X(t) := \mathbb{E}[X(t, 1)]$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\mu_X(t)}{dt} = t\mu_X(t) \\ \mu_X(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

la cui soluzione è $\mu_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Inoltre, ponendo $Y(t) := f(t, X(t)) = X^2(t)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$Y(t) = 1 + \int_0^t ds\,(2s+1)\,X^2(s) + \int_0^t 2X^2(s)\,dB(s) \ . \tag{12}$$

Quindi, ponendo $q_X(t) := \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_X(t) = (2t+1)\,q_X(t) \\ q_X(0) = 1 \end{cases} \tag{13}$$

ovvero,

$$q_X(t) = e^{\int_0^t ds(2s+1)} = e^{t(t+1)} \ . \tag{14}$$

La varianza di $X(t, X_0)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2(t, X_0)\right] - \mathbb{E}^2[X(t, X_0)] = q_X(t) - \mu_X^2(t) = e^{t(t+1)} - e^{t^2} = e^{t^2}\left(e^t - 1\right) \ . \tag{15}$$

3. Dalla (8) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y(t)] &= \frac{t}{2}(t-1) && (16) \\ Cov[Y(t), Y(s)] &= \mathbb{E}[(Y(t) - \mathbb{E}[Y(t)])(Y(s) - \mathbb{E}[Y(s)])] && (17) \\ &= \mathbb{E}[B(t)\,B(s)] = (t \wedge s) \end{aligned}$$

Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y &:= (\log X(1,1), \log X(2,1)) && (18) \\ &= (B(1), 1 + B(2)) \end{aligned}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = (0, 1) \tag{19}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ . \tag{20}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad &: \ = \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, Y\rangle}\right] = e^{i\langle \lambda, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda, \lambda\rangle} \\ &= \ e^{i\lambda_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{21}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Studiare il limite in distribuzione per* $t \to \infty$ *del processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 + \int_0^t ds\,(1 - X(s)) + \int_0^t dB(s) \ , \\ dX(t) &= (1 - X(t))\,dt + dB(t) \ . \end{aligned} \tag{22}$$

dove $(B(t) \ , \ t \geq 0)$ *è il moto browniano.*

Soluzione: L'equazione (22) è un EDS di Itô con rumore additivo.

Ponendo

$$Y(t) = f(t, X(t)) := e^t X(t) \tag{23}$$

e calcolandone il differenziale di Itô, poiché

$$\partial_t f(t, x) = f(t, x) \ , \tag{24}$$

$$\partial_x f(t, x) = e^t \ , \tag{25}$$

$$\partial_x^2 f(t, x) = 0 \ , \tag{26}$$

si ha

$$dY(t) = e^t dt + e^t dB(t) \ ; \tag{27}$$

ovvero, poiché $Y(0) = X_0$,

$$Y(t, X_0) = X_0 + e^t - 1 + \int_0^t e^s dB(s) \tag{28}$$

Pertanto,

$$X(t, X_0) = X_0 e^{-t} + 1 - e^{-t} + e^{-t}\int_0^t e^s dB(s) \ . \tag{29}$$

Quindi, $X(t, X_0)$ è un processo gaussiano di valore atteso

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = \mathbb{E}[X_0]\, e^{-t} + 1 - e^{-t} \tag{30}$$

e covarianza

$$\begin{aligned} Cov\left[X\left(t,X_0\right),X\left(s,X_0\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(X\left(t,X_0\right)-\mathbb{E}\left[X\left(t,X_0\right)\right]\right)\left(X\left(s,X_0\right)-\mathbb{E}\left[X\left(s,X_0\right)\right]\right)\right] \\ &= e^{-(t+s)}\int_0^{t\wedge s} d\tau e^{2\tau} = \frac{e^{-(t+s)}}{2}\left(e^{2(t\wedge s)}-1\right)\ , \end{aligned} \tag{31}$$

in particolare, per ogni $t>0, X_t\left(X_0\right):=X\left(t,X_0\right)$ è una v.a. gaussiana di valore atteso $\mathbb{E}\left[X\left(t,X_0\right)\right]$ e varianza

$$\begin{aligned} Var\left[X\left(t,X_0\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(X\left(t,X_0\right)-\mathbb{E}\left[X\left(t,X_0\right)\right]\right)^2\right] \\ &= Cov\left[X\left(t,X_0\right),X\left(t,X_0\right)\right] = \frac{\left(1-e^{-2t}\right)}{2}\ . \end{aligned} \tag{32}$$

Dunque, il limite per $t\to\infty$ di $X_t\left(X_0\right)\overset{d}{=}N\left(1,\frac{1}{2}\right)$. ■