# Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2021/2022
03/02/2022

**Esercizio 1** *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo stocastico* $(X(t)\ ,\ t\geq 0)$ *tale che* $\forall t\geq 0$,

$$X(t) := \exp\left[-\frac{t^3}{6} + \int_0^t s dB(s)\right] ,$$

*dove* $(B(t)\ ,\ t\geq 0)$ *è il moto browniano.*

1. *Dimostrare che il processo stocastico* $(X(t)\ ,\ t\geq 0)$ *è una martingala rispetto alla filtrazione* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$;
2. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(\log X(2), \log X(1))$.

**Soluzione:**

1. Poniamo $Y(t) := \log X(t)$; allora $Y(t) = -\frac{t^3}{6} + \int_0^t s dB(s)$, quindi $dY(t) = -\frac{t^2}{2}dt + t dB(t)$. Calcolando il differenziale di Itô di $X(t) = f(t,x) = e^x$ per $x = Y(t)$ otteniamo

$$\partial_t f = 0\ ,\ \partial_x f = f\ ,\ \partial_x^2 f = f\ ,$$

ovvero

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t)\left[-\frac{t^2}{2}dt + t dB(t)\right] + X(t)\frac{t^2}{2}dt \\ &= X(t)\, t dB(t)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

2. Ponendo $Y(t) := \log X(t) = -\frac{t^3}{6} + \int_0^t s dB(s)$, si ha $\mathbb{E}[Y(t)] = -\frac{t^3}{6}$,

$$\begin{aligned} Cov[Y(t), Y(s)] &= \mathbb{E}[Y(t) Y(s)] \\ &= \int_0^{t\wedge s} d\tau \tau^2 = \frac{(t\wedge s)^3}{3}\ . \end{aligned}$$

Pertanto il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y\ &:= (Y(2), Y(1)) = \\ &= \left(-\frac{8}{6} + \int_0^2 s dB(s), -\frac{1}{6} + \int_0^1 s dB(s)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{6}\right) \tag{3}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$\begin{aligned} C \quad : \quad &= \begin{pmatrix} Var\left[Y(2)\right] & Cov\left[Y(2), Y(1)\right] \\ Cov\left[Y(2), Y(1)\right] & Var\left[Y(1)\right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{4}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad : \quad &= \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, Y\rangle}\right] = e^{i\langle \lambda, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda, \lambda\rangle} \\ &= e^{-i\left(\lambda_1 \frac{4}{3} + \lambda_2 \frac{1}{6}\right)} \exp\left[-\frac{1}{6}\left(8\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 1\lambda_2^2\right)\right] . \end{aligned} \tag{5}$$

■

**Esercizio 2** *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo stocastico* $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ *tale che* $\forall t \geq 0$,

$$X(t) := \log\left(1 + tB(t) - \int_0^t ds B(s)\right)^2$$

*dove* $(B(t)\ ,\ t \geq 0)$ *è il moto browniano. Derivare l'Equazione Differenziale Stocastica di Itô che descrive il processo e la densità di probabilità della v.a.* $\xi := X(1)$.

**Soluzione:** Poniamo $X(t) = \log Y^2(t)$ con $Y(t) := 1 + tB(t) - \int_0^t dsB(s) = 1 + \int_0^t sdB(s)$. Allora, il differenziale di Itô di $X(t)$ è

$$\begin{aligned} dX(t) &= \frac{2}{|Y(t)|} dY(t) - \frac{t^2}{Y^2(t)} dt \\ &= -\frac{t^2}{Y^2(t)} dt + \frac{2}{|Y(t)|} t dB(t) \\ &= -\frac{1}{2} t^2 e^{-X(t)} dt + e^{-\frac{X(t)}{2}} t dB(t)\ , \end{aligned}$$

Pertanto $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ risolve l'Equazione Differenziale Stocastica di Itô

$$\begin{cases} dX(t) = -\frac{1}{2} t^2 e^{-X(t)} dt + e^{-\frac{X(t)}{2}} t dB(t) \\ X(0) = 0 \end{cases} .$$

Fissato $t \geq 0, Y(t)$ è una v.a. gaussiana di attesa 1 e varianza $\frac{t^3}{3}$. Pertanto, la densità di $\xi = 2\log|Y(1)|$ è

$$\begin{aligned} f_\xi(x) \quad : &= \frac{d}{dx} F_\xi(x) = \frac{d}{dx} \mathbb{P}\{\xi \leq x\} \\ &= \frac{d}{dx} \mathbb{P}\{2\log|Y(1)| \leq x\} \\ &= \frac{d}{dx} \mathbb{P}\left\{|Y(1)| \leq e^{\frac{x}{2}}\right\} \\ &= \frac{d}{dx} \mathbb{P}\left\{-e^{\frac{x}{2}} \leq Y(1) \leq e^{\frac{x}{2}}\right\} \\ &= \frac{d}{dx} \int_{-e^{\frac{x}{2}}}^{e^{\frac{x}{2}}} dy \frac{e^{-\frac{(y-1)^2}{\frac{2}{3}}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}} \\ &= \frac{e^{-\frac{3\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2}{2}}}{2\sqrt{\frac{2}{3}\pi}} e^{\frac{x}{2}} + \frac{e^{-\frac{3\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)^2}{2}}}{2\sqrt{\frac{2}{3}\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \ . \end{aligned}$$

■