Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2017/2018
04/07/2018

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds \left[\sqrt{s} X(s) + e^{-s}\right] + \int_0^t s dB(s) \ , \tag{1}$$
$$dX(t) = \left[\sqrt{s} X(t) + e^{-t}\right] dt + t dB(t) \ .$$

dove $(B(t) \ , \ t \geq 0)$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 0$.
2. *Calcolare la funzione di covarianza di* $(X(t) \ , \ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(X(2, X_0), X(1, X_0))$ *dove il processo stocastico* $(X(t, X_0) \ , \ t \geq 0)$ *è dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô di cui al precedente punto 1.*

Soluzione:

1. Lequazione (1) è un EQS di Itô con rumore additivo. Ponendo

$$Y(t) = f(t, X(t)) := X(t) e^{-\int_0^t ds \sqrt{s}} = X(t) e^{-\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, si ottiene

$$df(t, X(t)) = \left\{(\partial_t f)(t, X(t)) + (\partial_x f)(t, X(t)) \left[\sqrt{t} X(t) + e^{-t}\right] + \frac{1}{2} t^2 \left(\partial_x^2 f\right)(t, X(t))\right\} dt \tag{3}$$
$$+ t (\partial_x f)(t, X(t)) dB(t) \ .$$

Ovvero, poiché $f(t, x) = x e^{-\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}}$, e

$$\partial_t f(t, x) = -\sqrt{t} f(t, x) \ , \tag{4}$$
$$\partial_x f(t, x) = \frac{f(t, x)}{x} \ , \tag{5}$$
$$\partial_x^2 f(t, x) = 0 \ , \tag{6}$$

si ha

$$dY\left(t\right)=e^{-\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right)}dt+te^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}dB\left(t\right) \tag{7}$$

cioè, tenendo conto che $Y\left(0,X\left(0\right)\right)=X_0$,

$$Y\left(t,X_0\right)=X_0+\int_0^t e^{-\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}+s\right)}ds+\int_0^t se^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}dB\left(s\right)\ , \tag{8}$$

dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X\left(t,X_0\right) &= e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}Y\left(t,X_0\right) \\ &= e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}\left[X_0+\int_0^t e^{-\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}+s\right)}ds+\int_0^t se^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}dB\left(s\right)\right]\ . \end{aligned} \tag{9}$$

2. Ponendo $X_0=0$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X\left(t,X_0\right)\right] &= e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}\left\{\int_0^t e^{-\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}+s\right)}ds+\mathbb{E}\left[\int_0^t se^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}dB\left(s\right)\right]\right\}= \\ &= e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}\int_0^t e^{-\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}+s\right)}ds\ . \end{aligned} \tag{10}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} Cov\left[X\left(t,X_0\right),X\left(s,X_0\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(X\left(t,X_0\right)-\mathbb{E}\left[X\left(t,X_0\right)\right]\right)\left(X\left(s,X_0\right)-\mathbb{E}\left[X\left(s,X_0\right)\right]\right)\right] \qquad (11)\\ &= e^{\frac{2}{3}\left(t^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{3}{2}}\right)}\int_0^{t\wedge s}d\tau\tau^2e^{-\frac{4}{3}\tau^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}\left(t^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{3}{2}}\right)}\int_0^{\frac{4}{3}\left(t\wedge s\right)^{\frac{3}{2}}}ue^{-u}du \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}\left(t^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{3}{2}}\right)}\left[1-\left(1+\frac{4}{3}\left(t\wedge s\right)^{\frac{3}{2}}\right)e^{-\frac{4}{3}\left(t\wedge s\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\ . \qquad (12) \end{aligned}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y\ &:= \left(X\left(2,X_0\right),X\left(1,X_0\right)\right)=\left(X\left(2,0\right),X\left(1,0\right)\right) \\ &= \left(e^{-\frac{2\sqrt{8}}{3}}\left[\int_0^2 e^{-\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right)}dt+\int_0^2 te^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}dB\left(t\right)\right],\right. \\ &\quad \left. e^{-\frac{2}{3}}\left[\int_0^1 e^{-\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right)}dt+\int_0^1 te^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}dB\left(t\right)\right]\right) \end{aligned} \tag{13}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu=\left(e^{-\frac{2\sqrt{8}}{3}}\int_0^2 e^{-\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right)}dt,e^{-\frac{2}{3}}\int_0^1 e^{-\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right)}dt\right)=\left(\mu_1,\mu_2\right) \tag{14}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$\begin{aligned} C\ &:= \begin{pmatrix} Cov\left[X\left(2,0\right),X\left(2,0\right)\right] & Cov\left[X\left(2,0\right),X\left(1,0\right)\right] \\ Cov\left[X\left(2,0\right),X\left(1,0\right)\right] & Cov\left[X\left(1,0\right),X\left(1,0\right)\right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\ . \end{aligned} \tag{15}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad : &= \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, Y\rangle}\right] = e^{i\langle \lambda, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda, \lambda\rangle} \\ &= e^{i(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2\right)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

■

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo stocastico* $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ *tale che* $\forall t \geq 0, X(t) := \left(B(t) + \sqrt{X_0}\right)^2$, *dove* X_0 *è una v.a. positiva e* $(B(t)\ ,\ t \geq 0)$ *è il moto browniano. Calcolare il differenziale di Itô di* $X(t)$ *ed identificare il termine martingala.*

Soluzione: Ponendo $X(t) = f(B(t))$ ed applicando il Lemma di Itô si ha $f'(x) = 2\left(x + \sqrt{X_0}\right) = 2\sqrt{f(x)}, f''(x) = 2$. Pertanto,

$$df(B(t)) = \frac{1}{2}f''(B(t))\,dt + f'(B(t))\,dB(t)\ , \tag{17}$$

ovvero $(X(t)\ ,\ t \geq 0)$ verifica l'Equazione Differenziale Stocastica di Itô

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t ds + \int_0^t 2\sqrt{X(s)}dB(s)\ , \tag{18}$$

$$dX(t) = dt + 2\sqrt{X(t)}dB(t)\ , \tag{19}$$

il cui termine martingala è quindi $\int_0^t 2\sqrt{X(s)}dB(s)$. ■