Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2016/2017
05/07/2017

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$X(t, X_0) = X_0 + \int_0^t (s \log s) X(s) \, dB(s) \ , \tag{1}$$
$$dX(t) = (t \log t) X(t) \, dB(t) \ .$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 1$.
2. *Calcolare la varianza di* $(X(t, X_0) \ , \ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(\log X(2, X_0), \log X(1, X_0))$.

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.
   Ponendo
   $$Y(t) = f(t, X(t)) := \log \frac{X(t)}{X_0} \tag{2}$$
   e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t,x) = \log \frac{x}{X_0}$, e
   $$\partial_t f(t,x) = 0 \ , \tag{3}$$
   $$\partial_x f(t,x) = \frac{X_0}{x} \ , \tag{4}$$
   $$\partial_x^2 f(t,x) = -\frac{X_0}{x^2} \ , \tag{5}$$
   si ha
   $$dY(t) = -\frac{1}{2} t^2 \log^2(t) \, dt + t \log(t) \, dB(t) \ , \tag{6}$$
   $$Y(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t ds s^2 \log^2(s) + \int_0^t s \log(s) \, dB(s) \ . \tag{7}$$

Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^t ds s^2 \log^2(s) + \int_0^t s \log(s) dB(s)} \qquad (8) \\ &= X_0 e^{-\frac{1}{6}t^3\left(\left(\log t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}\right) + \int_0^t s \log(s) dB(s)} \ . \end{aligned}$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = 1 + \mathbb{E}\int_0^t s \log(s) X(s) dB(s) = 1 \ . \tag{9}$$

Inoltre, ponendo $Y(t) := f(t, X(t)) = X^2(t)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$Y(t) = 1 + \int_0^t ds s^2 \log^2(s) X^2(s) + \int_0^t 2X^2(s) s \log(s) dB(s) \ . \tag{10}$$

Quindi, ponendo $q_X(t) := \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_X(t) = t^2 \log^2(t) q_X(t) \\ q_X(0) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

ovvero,

$$q_X(t) = e^{\frac{1}{3}t^3\left(\left(\log t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}\right)} \ . \tag{12}$$

La varianza di $X(t, X_0)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2(t, X_0)\right] - \mathbb{E}^2[X(t, X_0)] = q_X(t) - 1 = e^{\frac{1}{3}t^3\left(\left(\log t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}\right)} - 1 \ . \tag{13}$$

3. Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y \quad &: = (\log X(2, X_0), \log X(1, X_0)) \qquad (14) \\ &= \left(-\frac{4}{3}\left(\left(\log 2 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}\right) + \int_0^2 t \log(t) dB(t), \frac{1}{27} + \int_0^1 t \log(t) dB(t)\right) \end{aligned}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = (-A, B) = \left(-\frac{4}{3}\left(\left(\log 2 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}\right), \frac{1}{27}\right) \tag{15}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$C := \begin{pmatrix} 2A & 2B \\ 2B & 2B \end{pmatrix} \ . \tag{16}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad &: = \mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda, Y\rangle}\right] = e^{i\langle\lambda,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda,\lambda\rangle} \qquad (17) \\ &= e^{-iA\lambda_1 + iB\lambda_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(2A\lambda_1^2 + 4B\lambda_1\lambda_2 + 2B\lambda_2^2\right)\right] \\ &= e^{-iA\lambda_1 + iB\lambda_2} \exp\left[-\left(A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\lambda_2 + B\lambda_2^2\right)\right] \ . \end{aligned}$$

■