Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2019/2020
26/02/2020

Esercizio 1 *Sia* $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ *una successione di vv.aa. tale che* ξ_0 *è uniformemente distribuita su* $[0,1]$ *e* $\forall n \geq 1, \xi_n$ *è uniformemente distribuita su* $\left[\xi_{n-1}, 1\right]$. *Dimostrare che la successione di vv.aa.* $\{\eta_n\}_{n\geq 0}$ *tale che* $\forall n \geq 0, \eta_n := 2^n (1-\xi_n)$ *è una martingala rispetto alla fitrazione generata dalla successione* $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ *e calcolare il valore atteso del termine n-simo.*

Soluzione: $\forall n \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[|\eta_n|\right] \leq 2^n \left(1+\mathbb{E}\left[\xi_n\right]\right) \leq 2^{n+1} < \infty \ ,$$

Inoltre, indicando con $\mathcal{F}_n$ la σalgebra generata da $(\xi_1, .., \xi_n)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\eta_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= 2^{n+1}\left(1-\mathbb{E}\left[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]\right) \\
&= 2^{n+1}\left(1-\mathbb{E}\left[\xi_{n+1}|\xi_n\right]\right) \\
&= 2^{n+1}\left(1-\frac{\int_{\xi_n}^1 dxx}{1-\xi_n}\right) \\
&= 2^{n+1}\left(1-\frac{1}{2}(1+\xi_n)\right) = \eta_n \ .
\end{aligned}$$

Allora $\mathbb{E}\left[\eta_n\right] = \mathbb{E}\left[\eta_0\right] = \mathbb{E}\left[1-\xi_0\right] = 1-\mathbb{E}\left[\xi_0\right] = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. $\blacksquare$

Esercizio 2 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Risolvere l'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{aligned}
X(t, X_0) &= X_0 + \int_0^t dss\left(X(s)+1\right) + \int_0^t s\left(X(s)+1\right) dB(s) \ , \qquad (1) \\
dX(t) &= t\left(X(t)+1\right) dt + t\left(X(t)+1\right) dB(t) \ .
\end{aligned}$$

dove $(B(t) \ , \ t \geq 0)$ *è il moto browniano.*

Soluzione: L'equazione (1) è un EQS di Itô lineare. Considerando l'equazione omogenea associata con dato iniziale uguale a 1,

$$Y(t) = 1 + \int_0^t dssX(s) + \int_0^t sX(s)\, dB(s) \ ,$$

la cui soluzione è

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \exp\left[\int_0^t ds\left(s-\frac{s^2}{2}\right)+\int_0^t sdB(s)\right] \qquad (2)\\
&= \exp\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+\int_0^t sdB(s)\right] .
\end{aligned}
$$

Calcolando il differenziale di Itô del processo stocastico $U(t)=f(t,Y(t)):=\frac{1}{Y(t)}$ otteniamo

$$
dU(t)=\left[-t+t^2\right]U(t)\,dt-tU(t)\,dB(t) \ ,
$$

quindi differenziale di Itô del prodotto $X(t,X_0)\,U(t)$ è

$$
d\left(X(t,X_0)\,U(t)\right)=\left[t+t^2\right]U(t)\,dt+tU(t)\,dB(t) \ .
$$

Perciò, poiché $X(0,X_0)\,U(0)=X_0$,

$$
X(t,X_0)\,U(t)=X_0+\int_0^t ds\left[s+s^2\right]U(s)+\int_0^t sU(s)\,dB(s)
$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
X(t,X_0) &= Y(t)\left\{X_0+\int_0^t ds\frac{s+s^2}{Y(s)}+\int_0^t \frac{s}{Y(s)}dB(s)\right\}\\
&= \exp\left[\frac{t^2}{2}\left(1-\frac{t}{3}\right)+\int_0^t sdB(s)\right]\times\\
&\quad \times\left\{X_0+\int_0^t ds\left(s+s^2\right)e^{-\frac{s^2}{2}\left(1-\frac{s}{3}\right)-\int_0^s \tau dB(\tau)}+\right.\\
&\quad \left.+\int_0^t se^{-\frac{s^2}{2}\left(1-\frac{s}{3}\right)-\int_0^s \tau dB(\tau)}dB(s)\right\} .
\end{aligned}
$$

■

Esercizio 3 *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(\log Y(1,1),\log Y(2,1))$ *dove* $(Y(t,1)\ ,\ t\geq 0)$ *è il processo stocastico dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô omogenea associata all'equazione (1).*

Soluzione: Sia $Z(t):=\log Y(t)$ dove $Y(t)$ è dato nella (2). Allora,

$$
\mathbb{E}[Z(t)]=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}
$$

e

$$
\begin{aligned}
Cov[Z(t),Z(s)] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \tau dB(\tau)\int_0^s \tau dB(\tau)\right]\\
&= \int_0^{t\wedge s} d\tau\tau^2=\frac{(t\wedge s)^3}{3} .
\end{aligned}
$$

Il vettore aleatorio $(Z(1), Z(2))$ è gaussiano di parametri $\mu := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e matrice di varianza-covarianza

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

e la sua funzione caratteristica è

$$\mathbb{R}^2 \ni (\lambda_1, \lambda_2) \longmapsto \varphi_\zeta(\lambda_1, \lambda_2) = e^{i\left(\frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\lambda_1^2 + \frac{2}{3}\lambda_1^2\lambda_2^2 + \frac{8}{3}\lambda_2^2\right)} \in \mathbb{C} \ .$$

■