Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2019/2020
05/07/2021

Esercizio 1 Sia $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ una successione di v.v.aa. tale che ξ_0 è uniformemente distribuita su $[0, 1]$ e $\forall n \geq 1, \xi_n$ è uniformemente distribuita su $[\xi_{n-1}, 1]$. Dimostrare che la successione di v.v.aa. $\{\eta_n\}_{n \geq 0}$ tale che $\forall n \geq 0, \eta_n := 2^n (1 - \xi_n)$ è una martingala rispetto alla filtrazione generata dalla successione $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ e calcolare il valore atteso del termine n -simo.

Soluzione: $\forall n \geq 0,$

$$\mathbb{E}[|\eta_n|] \leq 2^n (1 + \mathbb{E}[\xi_n]) \leq 2^{n+1} < \infty ,$$

Inoltre, indicando con $\mathcal{F}_n$ la σ algebra generata da $(\xi_1, \dots, \xi_n)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\eta_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= 2^{n+1} (1 - \mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ &= 2^{n+1} (1 - \mathbb{E}[\xi_{n+1} | \xi_n]) \\ &= 2^{n+1} \left(1 - \frac{\int_{\xi_n}^1 dx}{1 - \xi_n} \right) \\ &= 2^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2} (1 + \xi_n) \right) = \eta_n . \end{aligned}$$

Allora $\mathbb{E}[\eta_n] = \mathbb{E}[\eta_0] = \mathbb{E}[1 - \xi_0] = 1 - \mathbb{E}[\xi_0] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. ■

Esercizio 2 Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ lo spazio filtrato di Wiener. Risolvere l'Equazione Differenziale Stocastica di Itô

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 + \int_0^t ds s (X(s) + 1) + \int_0^t s (X(s) + 1) dB(s) , \\ dX(t) &= t(X(t) + 1) dt + t(X(t) + 1) dB(t) . \end{aligned} \tag{1}$$

dove $(B(t), t \geq 0)$ è il moto browniano.

Soluzione: L'equazione (1) è un EQS di Itô lineare. Considerando l'equazione omogenea associata con dato iniziale uguale a 1,

$$Y(t) = 1 + \int_0^t ds s X(s) + \int_0^t s X(s) dB(s) ,$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} Y(t) &= \exp \left[\int_0^t ds \left(s - \frac{s^2}{2} \right) + \int_0^t s dB(s) \right] \\ &= \exp \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \int_0^t s dB(s) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Calcolando il differenziale di Itô del processo stocastico $U(t) = f(t, Y(t)) := \frac{1}{Y(t)}$ otteniamo

$$dU(t) = [-t + t^2] U(t) dt - tU(t) dB(t),$$

quindi differenziale di Itô del prodotto $X(t, X_0)U(t)$ è

$$d(X(t, X_0)U(t)) = [t - t^2] U(t) dt + tU(t) dB(t).$$

Perciò, poiché $X(0, X_0)U(0) = X_0$,

$$X(t, X_0)U(t) = X_0 + \int_0^t ds [s - s^2] U(s) + \int_0^t sU(s) dB(s)$$

ovvero

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= Y(t) \left\{ X_0 + \int_0^t ds \frac{s - s^2}{Y(s)} + \int_0^t \frac{s}{Y(s)} dB(s) \right\} \\ &= \exp \left[\frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{t}{3} \right) + \int_0^t s dB(s) \right] \times \\ &\quad \times \left\{ X_0 + \int_0^t ds (s - s^2) e^{-\frac{s^2}{2} \left(1 - \frac{s}{3} \right) - \int_0^s \tau dB(\tau)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t s e^{-\frac{s^2}{2} \left(1 - \frac{s}{3} \right) - \int_0^s \tau dB(\tau)} dB(s) \right\}. \end{aligned}$$

■

Esercizio 3 Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio $(\log Y(1, 1), \log Y(2, 1))$ dove $(Y(t, 1), t \geq 0)$ è il processo stocastico dato dalla soluzione dell'Equazione Differenziale Stocastica di Itô omogenea associata all'equazione (1).

Soluzione: Sia $Z(t) := \log Y(t)$ dove $Y(t)$ è dato nella (2). Allora,

$$\mathbb{E}[Z(t)] = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z(t), Z(s)] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \tau dB(\tau) \int_0^s \tau dB(\tau) \right] \\ &= \int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^2 = \frac{(t \wedge s)^3}{3}. \end{aligned}$$

Il vettore aleatorio $(Z(1), Z(2))$ è gaussiano di parametri $\mu := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e matrice di varianza-covarianza

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

e la sua funzione caratteristica è

$$\mathbb{R}^2 \ni (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \varphi_\zeta(\lambda_1, \lambda_2) = e^{i(\frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2)} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\lambda_1^2 + \frac{2}{3}\lambda_1^2\lambda_2^2 + \frac{8}{3}\lambda_2^2) \in \mathbb{C}.$$

■