

Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2018/2019
06/02/2019

Esercizio 1 Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 - \int_0^t s^2 X(s) dB(s), \\ dX(t) &= -t^2 X(t) dB(t) . \end{aligned} \quad (1)$$

dove $(B(t), t \geq 0)$ è il moto browniano.

1. Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale $X_0 = 1$.
2. Calcolare la varianza di $(X(t, X_0), t \geq 0)$.
3. Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio $(\log X(2, X_0), \log X(1, X_0))$.

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.

Ponendo

$$Y(t) = f(t, X(t)) := \log \frac{X(t)}{X_0} \quad (2)$$

e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t, x) = \log \frac{x}{X_0}$, e

$$\partial_t f(t, x) = 0 , \quad (3)$$

$$\partial_x f(t, x) = \frac{X_0}{x} , \quad (4)$$

$$\partial_x^2 f(t, x) = -\frac{X_0}{x^2} , \quad (5)$$

si ha

$$dY(t) = -\frac{1}{2} t^4 dt - t^2 dB(t) , \quad (6)$$

$$Y(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t ds s^4 - \int_0^t s^2 dB(s) . \quad (7)$$

Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 e^{-\frac{1}{2} \int_0^t ds s^4 - \int_0^t s^2 dB(s)} \\ &= X_0 e^{-\frac{t^5}{10} - \int_0^t s^2 dB(s)}. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = 1 - \mathbb{E} \int_0^t s^2 X(s) dB(s) = 1. \quad (9)$$

Inoltre, ponendo $Y(t) := f(t, X(t)) = X^2(t)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$\begin{aligned} Y(t) &= 1 + \int_0^t ds s^4 X^2(s) - \int_0^t 2X^2(s) s^2 dB(s) \\ &= 1 + \int_0^t ds s^4 Y(s) - \int_0^t 2Y(s) s^2 dB(s). \end{aligned} \quad (10)$$

Quindi, ponendo $q_X(t) := \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}[X^2(t)]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_X(t) = t^4 q_X(t) \\ q_X(0) = 1 \end{cases} \quad (11)$$

ovvero,

$$q_X(t) = e^{\frac{t^5}{5}}. \quad (12)$$

La varianza di $X(t, X_0)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}[X^2(t, X_0)] - \mathbb{E}^2[X(t, X_0)] = q_X(t) - 1 = e^{\frac{t^5}{5}} - 1. \quad (13)$$

3. Dalla (7) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y(t, X_0)] &= -\frac{t^5}{10} \\ Cov[Y(t, X_0), Y(s, X_0)] &= \mathbb{E}[(Y(t, X_0) - \mathbb{E}[Y(t, X_0)])(Y(s, X_0) - \mathbb{E}[Y(s, X_0)])] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge s} d\tau \tau^4 \right] = \frac{(t \wedge s)^5}{5} \end{aligned} \quad (14)$$

Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y &: = (\log X(2, X_0), \log X(1, X_0)) \\ &= \left(-\frac{32}{10} - \int_0^2 t^2 dB(t), -\frac{1}{10} + \int_0^1 t^2 dB(t) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(-\frac{32}{10}, -\frac{1}{10} \right) = (\mu_1, \mu_2) \quad (17)$$

e matrice di varianza-covarianza

$$C := \begin{pmatrix} \frac{32}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) &: = \mathbb{E} \left[e^{i\langle \lambda, Y \rangle} \right] = e^{i\langle \lambda, \mu \rangle - \frac{1}{2} \langle C \lambda, \lambda \rangle} \\ &= e^{i(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)} \exp \left[-\frac{1}{2} (a \lambda_1^2 + 2b \lambda_1 \lambda_2 + b \lambda_2^2) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

■

Esercizio 2 *Un'urna contiene palline bianche e nere. Ogni volta che si estrae una pallina la si reimbussola insieme ad un'altra pallina dello stesso colore. Siano N_n e B_n rispettivamente il numero di palline nere e di palline bianche presenti nell'urna dopo l' n -esima estrazione. Supponendo che all'inizio l'urna contiene una pallina bianca e una nera, ovvero $N_0 = B_0 = 1$, dimostrare che la successione $\{X_n\}_{n \geq 0}$ tale che $X_n := \frac{N_n}{n+2}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale e studiarne la convergenza.*

Soluzione: Posto P_n il numero totale di palline contenute nell'urna prima dell' $n+1$ -sima estrazione, si ha

$$P_n = N_n + B_n = n + 2. \quad (20)$$

Inoltre, poiché si tratta di campionamento con reimbussolamento, la probabilità di estrarre una pallina nera dall'urna all' n -esima estrazione è pari alla frazione di palline nere ivi contenute. Dunque, la probabilità che il numero di palline nere contenute nell'urna dopo l' n -esima estrazione sia rimasto lo stesso è pari alla probabilità d'aver estratto una pallina bianca all' n -esima estrazione, ovvero

$$\mathbb{P}[N_{n+1} = m | N_n = m] = 1 - \frac{m}{n+2}, \quad (21)$$

perciò

$$\mathbb{P}[N_{n+1} = m+1 | N_n = m] = \frac{m}{n+2}. \quad (22)$$

Indicando con $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ la filtrazione generata dalla successione di v.a. $\{X_n\}_{n \geq 0}$, ovvero tale che $\mathcal{F}_n := \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$ e \mathcal{F}_0 è la σ algebra banale, poiché $\forall n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{N_1, \dots, N_n\}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E} \left[\frac{N_{n+1}}{n+3} | \mathcal{F}_n \right] = \mathbb{E} \left[\frac{N_{n+1}}{n+3} | N_n \right] \\ &= \frac{N_n}{n+3} \left(1 - \frac{N_n}{n+2} \right) + \frac{N_n+1}{n+3} \frac{N_n}{n+2} \\ &= \frac{N_n}{n+2} = X_n. \end{aligned} \quad (23)$$

Allora $\{X_n\}_{n \geq 0}$ è una martingala non negativa quindi, poiché $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = \frac{1}{2}$,

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_n|] = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] < \infty \quad (24)$$

è una L^1 -martingala e perciò convergente \mathbb{P} -q.c. ad una v.a. non negativa X tale che $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_0] = \frac{1}{2}$. Inoltre, siccome per definizione $B_n \geq B_0 = 1$, dalla (20) si ha che $N_n \leq n + 1$, dunque

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[X_n^2] = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}\left[\frac{N_n^2}{(n+2)^2}\right] \leq \sup_{n \geq 0} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \leq 1, \quad (25)$$

ovvero $\{X_n\}_{n \geq 0}$ è una L^2 -martingala e pertanto è regolare. ■