Esercizi di Probabilità e Processi stocastici

a.a.2019/2020
06/02/2020

Esercizio 1 *Sia* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *lo spazio filtrato di Wiener. Si consideri il processo descritto dall'Equazione Differenziale Stocastica di Itô*

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 + \int_0^t ds s X(s) + \int_0^t s X(s) \, dB(s) \ , \\ dX(t) &= tX(t) \, dt + tX(t) \, dB(t) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *è il moto browniano.*

1. *Risolvere l'equazione (1) assumendo il dato iniziale* $X_0 = 1$.
2. *Calcolare la varianza di* $(X(t, X_0) \ , \ t \geq 0)$.
3. *Calcolare la funzione caratteristica del vettore aleatorio* $(\log X(1,1), \log X(2,1))$.

Soluzione:

1. L'equazione (1) è un EDS di Itô con rumore moltiplicativo.
   Ponendo
   $$Y(t) = f(t, X(t)) := \log \frac{X(t)}{X_0} \tag{2}$$
   e calcolando il differenziale di Itô di $Y(t)$, poiché $f(t,x) = \log \frac{x}{X_0}$, e
   $$\partial_t f(t,x) = 0 \ , \tag{3}$$
   $$\partial_x f(t,x) = \frac{X_0}{x} \ , \tag{4}$$
   $$\partial_x^2 f(t,x) = -\frac{X_0}{x^2} \ , \tag{5}$$
   si ha
   $$dY(t) = \left(t - \frac{1}{2}t^2\right) dt + t dB(t) \ , \tag{6}$$
   $$Y(t) = \int_0^t ds \left(s - \frac{1}{2}s^2\right) + \int_0^t s dB(s) \ . \tag{7}$$

Ovvero, tenendo conto che $Y(0, X(0)) = 0$,

$$\begin{aligned} X(t, X_0) &= X_0 e^{\int_0^t ds\left(s-\frac{1}{2}s^2\right)+\int_0^t s dB(s)} \\ &= X_0 e^{\frac{t^2}{2}\left(1-\frac{t}{3}\right)+\int_0^t s dB(s)} \ . \end{aligned} \tag{8}$$

2. Poiché $X_0 = 1$, dalla (1) si ottiene

$$\mathbb{E}[X(t, X_0)] = 1 + \mathbb{E}\int_0^t sX(s)\, ds \ , \tag{9}$$

ovvero $\mu_X(t) := \mathbb{E}[X(t, 1)]$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\mu_X(t)}{dt} = t\mu_X(t) \\ \mu_X(0) = 1 \end{cases} \tag{10}$$

la cui soluzione è $\mu_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.
Inoltre, ponendo $Y(t) := f(t, X(t)) = X^2(t)$ e calcolandone il differenziale di Itô si ha

$$Y(t) = 1 + \int_0^t ds\,(2+s)\, sX^2(s) + \int_0^t 2sX^2(s)\, dB(s) \ . \tag{11}$$

Quindi, ponendo $q_X(t) := \mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right]$ e prendendo il valore atteso di entrambi i membri dell'espressione precedente, derivando rispetto a t si ha che q_X è la soluzione del problema di Chauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_X(t) = (2+t)\, t q_X(t) \\ q_X(0) = 1 \end{cases} \tag{12}$$

ovvero,

$$q_X(t) = e^{\int_0^t ds(2+s)s} = e^{t^2\left(1+\frac{t}{3}\right)} \ . \tag{13}$$

La varianza di $X(t, X_0)$ risulta allora pari a

$$\mathbb{E}\left[X^2(t, X_0)\right] - \mathbb{E}^2[X(t, X_0)] = q_X(t) - \mu_X^2(t) = e^{t^2\left(1+\frac{t}{3}\right)} - e^{t^2} = e^{t^2}\left(e^{\frac{t}{3}} - 1\right) \ . \tag{14}$$

3. Dalla (7) si ottiene

$$\mathbb{E}[Y(t, X_0)] = \frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{t}{3}\right) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} Cov[Y(t, X_0), Y(s, X_0)] &= \mathbb{E}[(Y(t, X_0) - \mathbb{E}[Y(t, X_0)])(Y(s, X_0) - \mathbb{E}[Y(s, X_0)])] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge s} d\tau \tau^2\right] = \frac{1}{3}(t \wedge s)^3 \end{aligned} \tag{16}$$

Il vettore aleatorio

$$\begin{aligned} Y &:= (\log X(1,1), \log X(2,1)) \\ &= \left(\frac{1}{3} + \int_0^1 sdB(s), \frac{2}{3} + \int_0^2 sdB(s)\right) \end{aligned} \tag{17}$$

ha distribuzione gaussiana di parametri

$$\mu = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \tag{18}$$

e matrice di varianza-covarianza

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} . \tag{19}$$

Quindi, $\forall \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(\lambda) \quad &: \quad = \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, Y\rangle}\right] = e^{i\langle \lambda, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle C\lambda, \lambda\rangle} \qquad (20) \\ &= \quad e^{\frac{i}{3}(\lambda_1 + 2\lambda_2)} \exp\left[-\frac{1}{6}\left(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 8\lambda_2^2\right)\right] . \end{aligned}$$

■

Esercizio 2 *Un urna contiene palline bianche e nere. Ogni volta che si estrae una pallina la si reimbussola insieme ad un'altra pallina dello stesso colore. Siano N_n e B_n rispettivamente il numero di palline nere e di palline bianche presenti nell'urna dopo l'ennesima estrazione. Supponendo che all'inizio l'urna contiene una pallina bianca e una nera, ovvero $N_0 = B_0 = 1$, dimostrare che la successione $\left\{X_n^2\right\}_{n\geq 0}$ tale che $X_n := \frac{B_n}{n+2}$ è una submartingala rispetto alla filtrazione naturale e studiarne la convergenza.*

Soluzione: Si veda la soluzione del tema d'esame del 28/02/2018. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ è una martingala quindi per la disuguaglianza di Jensen $\left\{X_n^2\right\}_{n\geq 0}$ è una submartingala. Inoltre, poiché $\{X_n\}_{n\geq 0}$ è una L^2-martingala $\left\{X_n^2\right\}_{n\geq 0}$ è una L^1-submartingala quindi convergente $\mathbb{P}$-q.c. ad una v.a. $Y \in L^1$.
■